1874. ANNALEN № 12.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CLIII.

I. *Ueber das Wärmeleitungsvermögen von Flüssigkeiten; von Dr. A. Winkelmann.*

Die wenigen Versuche, welche bisher über das Leitungsvermögen der Flüssigkeiten für Wärme gemacht worden sind, haben gezeigt, daſs die Untersuchungen dieser Art nur mit groſsen Schwierigkeiten anzustellen sind, deren Ueberwindung nur selten vollkommen gelungen ist.

Die Arbeit Paalzow's[1]) liefert für eine Reihe von Flüssigkeiten relative Bestimmungen, die, wie der Verfasser hervorhebt, nicht als definitive zu betrachten seyen, aus denen aber das Resultat sich ergiebt, daſs die Leitungsfähigkeiten für Wärme und Elektricität bei den Flüssigkeiten nicht einander proportional sind.

Die beiden Untersuchungen von Guthrie[2]) haben ebenfalls relative Bestimmungen zum Ziele; während bei der ersten keine genaue Berechnung den gefundenen Gröſsen zu Grunde gelegt wird, werden in der zweiten Abhandlung verschiedene Umstände, die für die angewandte Methode von Einfluſs sind, besonders hervorgehoben und als nothwendig zu berücksichtigen hingestellt. Die Art, wie die möglichen Fehlerquellen zu vermeiden und durch die Berechnung eliminirt sind, ist aber nicht angegeben, so daſs es unmöglich ist, sich auch nur annähernd ein Urtheil über die Genauigkeit und den Werth der Versuche zu bilden.

Lundquist[3]) hat eine ausgedehnte und sorgfältige

1) Diese Annalen Bd. CXXXIV. p. 618.
2) *Phil. Mag. vol. XXXV. p.* 283. *Arch. sc. phys. t. XXXV. p.* 201.
3) *Upsala Universitets Årsskrift* 1869.

Untersuchung, — welche, nach der Ångström'schen Methode angestellt, zuerst für die Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten absolute Werthe ergeben hat, — über Wasser, Chlornatrium-Lösung, Zinkvitriol-Lösung und Schwefelsäure gemacht und durch dieselbe zunächst das vorhin erwähnte Resultat Paalzow's bestätigt, weiter aber gezeigt, daſs bei den Flüssigkeiten das Leitungsvermögen für Wärme viel weniger varrirt, als jenes für Elektricität.

§. 1.

Zu der folgenden Untersuchung ist dieselbe Methode benutzt, welche Stefan[1]) mit so schönem Erfolge für die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit der Luft angewandt hat. Es waren bei den Flüssigkeiten indessen weitere Schwierigkeiten zu überwinden, welche für Gase nicht eintraten; auſserdem konnte auch die einfache Rechnungsweise, welche von Stefan für seine Versuche benutzt ist, für Flüssigkeiten als zulässig nicht betrachtet und muſste durch eine weniger einfache ersetzt werden; der Grund hiervon wird sich später ergeben.

Der Apparat bestand aus zwei Cylindern von Messing, von denen der eine, welcher als Luftthermometer diente, so in dem anderen paſste, daſs seine äuſsere Oberfläche überall gleich weit von dem zweiten Cylinder entfernt war; in den durch beide Cylinder gebildeten Zwischenraum wurde die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt. Um den inneren Cylinder als Luftthermometer anwenden zu können, hatte derselbe in der oberen Endfläche eine kleine runde Oeffnung, in welche eine Glasröhre eingekittet war; letztere hielt zugleich den oberen Deckel des äuſsern Cylinders so angekittet, daſs durch Einsetzen dieses Deckels der äuſsere Cylinder geschlossen war und der innere die richtige Lage erhalten hatte. Nachdem die Glasröhre den Deckel verlassen hatte, war sie zwei Mal

1) Wiener Berichte. Bd. LXV. p. 45.

rechtwinklig umgebogen und tauchte in ein Glasgefäfs, welches wenig Quecksilber enthielt. Auf der oberen Endfläche des äufsern Cylinders war ein feiner Trichter aufgesetzt, welcher nach Zusammensetzung des Apparates ebenso wie der genannte Zwischenraum mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt wurde, damit bei der darauf folgenden Abkühlung des Apparates und der sich daraus ergebenden Contraction der Flüssigkeit so viel nachfliefsen konnte, dafs der Raum zwischen den Cylindern fortwährend gefüllt blieb.

Die Versuche wurden so angestellt, dafs der Apparat, welcher eine überall gleichmäfsige Temperatur, — jene des Zimmers — angenommen hatte, in eine Mischung von Wasser und ganz fein zertheiltem Eis eingesenkt wurde; nachdem das Quecksilber einige Millimeter in die Glasröhre gestiegen war, wurde das Fadenkreuz des vorher eingestellten Kathetometers von der Quecksilbersäule berührt und von diesem Moment die Zeit gezählt; alsdann wurde das Fernrohr des Kathetometers um 5^{mm} gehoben und die Zeit beobachtet, wann jetzt wieder die Berührung vor sich ging. In dieser Weise wurden die Berührungszeiten bei je 5^{mm} Steighöhe bis zu 25^{mm} bestimmt, und dann so lange gewartet, bis der ganze Apparat die Temperatur 0° der Mischung angenommen hatte, um auch schliefslich die dann erreichte Höhe der Quecksilbersäule abzulesen.

§. 2.

Durch die beobachtete Geschwindigkeit der Steighöhen des Quecksilbers läfst sich die Abkühlungsgeschwindigkeit des innern Cylinders direct bestimmen.

Wenn zur Zeit 0 die Temperatur des innern Cylinders τ_0 ist, zur Zeit t, τ, so ist die Abkühlungsgeschwindigkeit v.

$$v = \frac{l_{nat} \frac{\tau_0}{\tau}}{t}$$

Ist nun in der Zeit t die Quecksilbersäule um p^{mm} gestiegen, am Schlusse des Versuches, wo der innere Cylinder die Temperatur 0° hat, um $p_{,}^{mm}$, so ist, wenn mit P der Druck bezeichnet wird, unter welchem die Luft des innern Cylinders zur Zeit 0 steht, und das Volumen der Luft als constant betrachtet wird,

$$\frac{P}{1+\alpha\tau_0} = P - p_{,} \text{ und } \frac{P-p}{1+\alpha\tau} = P - p_{,}$$

daher

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{p_1}{p_1 - p},$$

und

$$v = \frac{l_{nat}\, p_1 - l_{nat}\,(p_1 - p)}{t}.$$

Um mit Hülfe dieser Abkühlungsgeschwindigkeit die Wärmeleitungsfähigkeit der eingefüllten Flüssigkeit zu bestimmen, betrachten wir eine Fläche, welche parallel der äufsern Begrenzung des Apparates in dem Abstande x von der äufsern Fläche in dem Zwischenraum beider Cylinder gelegen ist. Diese Fläche wurde mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so dafs, wenn R der innere Radius des äufsern Cylinders und H die Höhe desselben ist,

$$\varphi(x) = 2\pi (R - x)^2 + 2\pi (R - x)(H - 2x)$$
$$= 2\pi (R - x)(H + R - 3x).$$

Wenn weiter mit u die Temperaturfunction bezeichnet wird, welche die Temperatur der einzelnen Theile des Zwischenraumes darstellt, so geht — unter der Voraussetzung, dafs eine Fläche, welche dem äufseren Cylinder paralell ist, in allen ihren Theilen dieselbe Temperatur habe, — durch die Fläche $\varphi(x)$ während der Zeit dt die Wärmemenge

$$\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x} \,.\, k \,.\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I.}$$

Durch die Fläche $\varphi(x + dx)$ geht in derselben Zeit dt die Wärmemenge

$$\left\{\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=(x+dx)} \,.\; k \,.\, dt \,.\; . \quad \text{II.}$$

Die Wärmemengen, welche in den Ausdrücken I. und II. dargestellt sind, würden einander gleich seyn,

wenn die Temperaturen der Flächen $\varphi(x)$ und $\varphi(x+dx)$ mit der Zeit sich nicht änderten; die Temperaturen nahmen aber für beide Flächen in verschiedener Weise ab, und zwar hat

zur Zeit t die Fläche $\varphi(x)$ die Temperatur u_x,

zur Zeit t die Fläche $\varphi(x+dx)$, die Temperatur u_{x+dx},

zur Zeit $(t+dt)$ die Fläche $\varphi(x)$, die Temperatur

$$\left\{u+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right\}_x$$

zur Zeit $(t+dt)$ die Fläche $\varphi(x+dx)$, die Temperatur

$$\left\{u+\frac{\partial u}{\partial t}dt\right\}_{x+dx}.$$

Die Differenz des Wärmeinhaltes des Volumens $\varphi(x)\,dx$ zur Zeit t und $(t+dt)$ geht durch die Fläche $\varphi(x+dx)$ weniger als durch die Fläche $\varphi(x)$ während der Zeit dt.

Ist c die specifische Wärme und s das specifische Gewicht der zu untersuchenden Flüssigkeit, so ist diese Differenz bis auf Größen dritter Ordnung, wie sich aus dem Obigen ergiebt,

$$-c.s.\varphi(x)\,dt.\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Daher haben wir in Verbindung mit den vorhin gewonnenen Ausdrücken die Gleichung

$$dt.k\left\{\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=dt.k\left\{\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x+dx}$$
$$-c.s\,\varphi(x)\,dx\,\frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

oder

$$\left\{\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right\}k-c.s\,\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad . \quad \text{III.}$$

Wenn aus vorstehender Differentialgleichung die Temperaturfunction u abgeleitet ist, erhält man die Wärmeleitungsfähigkeit k in folgender Weise.

Bezeichnet P das Gewicht des innern Cylinders, C die specifische Wärme desselben, und ist der Abstand der beiden Cylinder a, so giebt der erstere in der Zeit dt die Wärmemenge

$$P.C.\left\{\frac{\partial u}{\partial t}dt\right\}_{x=a}$$

ab. Dieselbe Wärmemenge geht durch die unmittelbar den innern Cylinder begrenzende Flüssigkeitsschicht

$$\left\{\varphi(x)\right\}_{x=a};$$

daher

$$k\,.\,dt\left\{\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=a}=-P.C.\left\{\frac{\partial u}{\partial t}dt\right\}_{x=a}$$

oder

$$k=-P\,.\,C\,.\left\{\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\varphi\,(x)\frac{\partial u}{\partial x}}\right\}_{x=a}\quad .\ .\ .\ .\ \text{IV.}$$

Die Differentialgleichung III läſst sich nun nicht in geschlossener Form lösen, so daſs auch die Temperaturfunction u nicht allgemein bestimmt werden kann. Es ist indessen u als Function von t für $x=a$ bekannt, da die Temperatur des innern Cylinders als Function der Zeit aus der Abkühlungsgeschwindigkeit v sich ergiebt. Nach den Bezeichnungen, die zu Anfang dieses Paragraphen eingeführt sind, ist die Temperatur desselben zur Zeit t

$$u_{x=a}=\tau_o\,e^{-vt}$$

daher erhält man für $\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}_{x=a}$, was in die Formel IV eingeht,

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}_{x=a}=-\tau_o\,v e^{-vt}$$

Um mittels einer angenäherten Lösung der Differentialgleichung III den zweiten Werth $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{x=a}$, welcher in die Formel IV eingeht, zu erhalten, kann man setzen

$$u=\tau_o\,e^{-vt}\,(\alpha\,x+\beta\,x^2+\gamma\,x^3)$$

Durch diese Form wird die erste Bedingung, welcher u genügen muſs, nämlich daſs u für $x=o$ selbst o sey, erfüllt.

Damit auch die zweite Bedingung, nach welcher u für $x=a$ gleich $\tau_o\,e^{-vt}$ sey, erfüllt werde, haben die Constanten α, β, γ der Gleichung zu genügen:

$$\alpha\,a+\beta\,a^2+\gamma\,a^3=1\quad .\ .\ .\ .\ 1)$$

Zwei weitere Bestimmungsgleichungen für die Constanten erhält man aus der Differentialgleichung III und zwar die einfachsten Formen, wenn man sie anwendet für $x = a$ und $x = o$, nämlich

$$\left\{\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right\}_{x=a} . (\alpha + 2\,\beta\,a + 3\,\gamma\,a^2) + \varphi(a)(2\,\beta + 6\,\gamma\,a) + \frac{c.\,s.\,\varphi(a).\,v}{k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

$$\left\{\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right\}_{x=o} . \alpha + \varphi(o) . \beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Sind aus den drei letzten Gleichungen α, β, γ bestimmt, so erhält man aus Gleichung IV den Werth von k.

Um über die Genauigkeit des so erhaltenen Werthes k ein Urtheil zu gewinnen, habe ich zunächst die Rechnung durchgeführt für eine Function u, welche noch ein viertes Glied enthält, für

$$u = r_o e^{-\nu t}\,(\alpha\,x + \beta\,x^2 + \gamma\,x^3 + \delta\,x^4)$$

Neben den vorhin genannten drei Bestimmungsgleichungen für die Constanten, welche hier analog gebildet wurden, ist als neue Gleichung die Differentialgleichung III für den Werth $x = \frac{1}{2}a$ eingeführt. Der nach der letzten Function gewonnene Werth von k unterschied sich von dem früher gefundenen um eine sehr kleine Gröfse; er war für Wasser 0,001418, während der nach der ersten Function berechnete 0,001416 war. Man darf in dieser Uebereinstimmung wohl den Beweis sehen, dafs die angenommene Function so annähernd der Differentialgleichung III genügt, als es erforderlich war, um mit Hülfe derselben den Werth von k zu bestimmen. Eine weitere Stütze für die Anwendbarkeit der erwähnten Function bildet das Resultat einer Vergleichung der nach derselben ermittelten Werthe von k mit den von Stefan gefundenen Werthen für die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft. Die Formel, welche Stefan anwendet, ist

$$k = v . \frac{P . C . a}{F}$$

Hierin haben v, P, C, a dieselbe Bedeutung, wie in meinen vorhin angegebenen Formeln; F stellt das Mittel der beiden Oberflächen des inneren und äufseren Cylinders

dar. Da auch in meinen Formeln v *nur* als Factor auftritt, so ist es möglich eine Vergleichung auszustellen, ohne Versuchsresultate in Rechnung ziehen zu müssen. Wird nämlich in meinen Formeln das Product $c.s$ der spec. Wärme und des spec. Gewichtes gleich o gesetzt, so muſs der so erhaltene Werth von $\frac{k}{v}$ mit dem nach der Stefan'schen Formel berechneten übereinstimmen. In § 4 sind für die einzelnen Apparate, welche von mir bei den Versuchen verwandt wurden, die Gröſsen P, C, a direct angegeben und weiter die Höhe und der Radius des innern Cylinders, woraus sich in Verbindung mit a die Gröſse F bestimmt, mitgetheilt, so daſs der Ausdruck $\frac{P.C.a}{F}$, welchen die Formel von Stefan verlangt, sich unmittelbar ergiebt. Die Durchsicht der unten angegebenen Werthe zeigt, daſs die Differenz der nach beiden Formeln berechneten Gröſsen nur eine sehr kleine ist, so daſs auch hierdurch die Anwendbarkeit der mehrfach erwähnten Function u dargethan ist. Die Ableitung der Formel von Stefan beruht in der Betrachtung der Wärmemenge, welche vom innern zum äuſsern Cylinder übergeht; bei der Untersuchung von Flüssigkeiten, welche immer gegenüber den Metallen eine groſse spec. Wärme besitzen, reicht diese Betrachtung nicht aus, da die vom innern Cylinder abgegebene Wärmemenge selbst bei beträchtlichen Dicken desselben gegenüber der ganzen Wärmemenge, welche dem Apparat während des Versuches entzogen wird, nur einen kleinen Bruchtheil bildet.

$\frac{k}{v}$ $(c.s = o)$ berechnet nach der Formel

	von Stefan	von Winkelmann
App. I.	0,01787	0,01784
App. II.	0,02757	0,02762
App. III.	0,06132	0,06202

§. 3.

Nachdem ich mich lange vergeblich bemüht hatte, constante Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit der innern Cylinder nähernd der Versuche zu erhalten, gelang es mir endlich den Grund für diese Inconstanz kennen zu lernen und zu beseitigen. Wird nämlich der Apparat einfach in die Mischung von Wasser und Eis eingesenkt, so nehmen regelmäſsig die Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit um so mehr ab, je länger der Apparat in der Mischung steht. Diese Abnahme war so stark und bei den verschiedenen Apparaten so ungleichmäſsig, daſs dieselbe durch eine Veränderlichkeit des Leitungsvermögens mit der Temperatur keine Erklärung finden konnte. Da die Abkühlung des Apparates sehr schnell vor sich ging und in Folge dessen, wegen des groſsen Wärmeinhaltes desselben, in kurzer Zeit eine relativ groſse Wärmemenge von der Eismischuug aufgenommen werden muſste, so lag die Vermuthung nahe, daſs die Voraussetzung bei der Berechnung der Versuche, nach welcher der äuſsere Cylinder fortwährend dieselbe Temperatur habe, nicht erfüllt war. Es wurde daher mit einem einfachen ringförmigen Rührer, welcher ein Drittel des Raumes zwischen dem Apparat und der Wandung des Gefäſses, welches die Eismischung enthielt, ausfüllt, während des Versuches gerührt, um fortwährend neue Eis- und Wasser-Theilchen mit der äuſsern Oberfläche des Apparates in Berührung zu bringen. Der Erfolg zeigte zwar, daſs die Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit weniger als früher abnahmen und überhaupt gewachsen waren, daſs aber die Constanz der Werthe auch noch nicht entfernt erreicht war. Es wurden nun verschiedene Formen von Rührern versucht und es gelang mir so bei einem Apparat eine vollständige Constanz der Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit zu erzielen. Für die übrigen Apparate, welche ich noch bei den Versuchen benutzte, versuchte ich endlich Rührer anzuwenden, welche nach der innern Seite mit einem Kranz von feinen Pinseln versehen waren, so daſs die cylindrische

Oberfläche der Apparate durch die Bewegung des Rührers fortwährend gebürstet wurde. Diese Anwendung hatte den gewünschten Erfolg bis für einen Apparat, bei welchem es mir überhaupt nicht gelungen ist, constante Werthe zu gewinnen. Der Grund hiervon war der, dafs die Masse des innern Cylinders zu klein war und der cylindrische Theil der Oberfläche gegenüber der ganzen einen zu kleinen Bruchtheil ausmachte, so dafs die Wirkung des Rührers sich auch nicht auf einen hinreichend grofsen Theil erstrecken konnte; es sind daher mit diesem Apparat auch keine weiteren Versuche gemacht. Jener Apparat, welcher schon mit einem gewöhnlichen Rührer constante Werthe geliefert hatte, ergab, wie vorauszusehen war, dieselben Werthe, als ein Rührer mit Pinseln angewendet wurde.

§. 4.

Die Versuche erstreckten sich auf Wasser, Alkohol, Schwefelkohlenstoff, Glycerin und zwei Salzlösungen; es wurden zu denselben drei verschiedene Apparate angewandt, deren Dimensionen folgende waren:

App. I.	App. II.	App. III.
$P = 74{,}71$ Gr.	$P = 142{,}06$ Gr.	$P = 163{,}32$ Gr.
$h = 6{,}000$ Cm.	$h = 6{,}991$ Cm.	$h = 8{,}894$ Cm.
$r = 1{,}525$ -	$r = 1{,}982$ -	$r = 1{,}492$ -
$a = 0{,}205$ -	$a = 0{,}259$ -	$a = 0{,}4952$ -

P bedeutet das Gewicht des innern Cylinders,
h - die Höhe - - -
r - den Radius - - -
a - den Abstand beider Cylinder.

Die Höhe und der Radius waren durch vielfach wiederholte Kathetometer-Messungen bestimmt worden, der Abstand der beiden Cylinder wurde aus dem Gewicht des Wassers, welches den Zwischenraum ausfüllte, berechnet.

Im Folgenden gebe ich die ausführlichen Versuchs-Tabellen der drei verschiedenen Apparate für Wasser, um hierdurch die Schwankungen erkennen zu lassen, denen die berechneten Werthe der Abkühlungsgeschwindigkeiten

unterliegen; für die übrigen Flüssigkeiten will ich mich damit begnügen, den gefundenen Mittelwerth anzugeben.

Die erste Reihe stellt in Millimetern die Steighöhe dar, welche die Quecksilbersäule, die die Luft des innern Cylinders abschloss, erlangte, die zweite Reihe die Sekunden, in denen diese Höhen erreicht wurden, die dritte Reihe giebt das Produkt $v \log e$, berechnet nach der Formel des §. 2.

$$v \log e = \frac{\log p_1 - \log (p_1 - p)}{t}.$$

Tabelle I.

W a s s e r.

App. I.			App. II.			App. III.		
Steighöhe.	Sekunden.	$v \log e$	Steighöhe.	Sekunden.	$v \log e$	Steighöhe.	Sekunden.	$v \log e$
10	13	0,0142	10	16	0,0102	5	12,5	0,00448
15	22	144	15	27	102	10	27	446
20	35	146	20	41,5	103	15	43‘5	450
25	59	147	25	65	102	20	64,0	449
28,9	∞		31,9	∞		(25	91	442)
						41,3	∞	
10	16,5	0,0145	10	18	0,0104	5	18	0,00449
15	30,5	143	15	31,5	103	10	40	451
20	56,5	145	20	51	103	15	69,5	446
23,6	∞		28,5	∞		(20	112,5	442)
						29,4	∞	
10	15,5	0,0146	10	17	0,0102	10	36,5	0,00449
15	28,5	143	15	28,5	104	15	61,5	448
20	50	145	20	45	104	(20	98	436)
24,66	∞		25	73	103	31,9	∞	
			30,4	∞				
10	14,5	0,0146	10	16	0,0104	5	16,5	0,00447
15	26,5	142	15	27	104	10	36	452
20	44,5	145	20	42,5	103	15	62	446
25,88	∞		25	67	103	32,1	∞	
			31,4	∞				
						5	15,5	0,00444
						10	34	444
						15	56	451
						(20	88	437)
						34	∞	

Für die beiden ersten Apparate ist die Sekundenzahl, nach welcher die Steighöhe 5^{mm} erreicht wurde, nicht angegeben, da dieselbe so klein ist, daſs ein kleiner Beobachtungsfehler in der Zeit das Resultat schon so bedeutend modificirt, daſs dasselbe als werthlos erscheinen muſste.

Die Schwankungen in den berechneten Werthen $v \log e$ sind für die Apparate I und II ganz regellos; bei dem dritten Apparate ist aber in jeder Versuchsreihe der letzte Werth der kleinste, während für die übrigen Werthe kein bestimmter Gang sich zeigt. Dieser Apparat lieferte auch bei Anwendung von gewöhnlichen Rührern die am stärksten abnehmenden Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit; den Grund, warum der letzte Werth, trotzdem die vorhergehenden bei Anwendung besonderer Rührer durchaus keine Abnahme mit wachsender Zeit zeigen, fortwährend zu klein ausgefallen ist, weiſs ich nicht anzugeben. Auch für die übrigen untersuchten Flüssigkeiten war für diesen Apparat der letzte Werth der kleinste, wenn auch bei einzelnen der Unterschied geringer war, als bei Wasser. Bei der Bildung des arithmetischen Mittels ist daher dieser Werth nicht berücksichtigt worden.

§. 5.

Die Berechnung von k aus den in §. 2 angegebenen Gleichungen führt auf eine sehr weitläufige Formel; es möge daher genügen, dieselbe in Constanten derartig mitzutheilen, daſs aus ihr der Werth von k für die verschiedenen Flüssigkeiten bestimmt werden kann.

Man hat

$$k = v \left\{ \frac{A \cdot c \cdot s + B}{D} \right\}$$

In dieser Formel bedeutet, wie früher v die Abkühlungsgeschwindigkeit des innern Cylinders, c die spec. Wärme und s das spec. Gewicht der untersuchten Flüssigkeit.

A B D sind Constanten, die von der Form des Apparates und dem Gewicht des innern Cylinders abhängen.

Es ist für den

I. App. $A = 72,10$; $B = 96,20$; $D = 5383,2$
II. App. $A = 111,74$; $B = 144,33$; $D = 5236,0$
III. App. $A = 97,36$; $B = 80,06$; $D = 1293,0$

Die folgende Tabelle enthält die Werthe der gefundenen Abkühlungsgeschwindigkeiten und die nach der obigen Formel berechneten Werthe von k für die verschiedenen Flüssigkeiten und Apparate zusammengestellt. Aufserdem ist für jede Flüssigkeit das spec. Gewicht und die spec. Wärme angegeben; ersteres bezieht sich auf Wasser von 15° als Einheit und ist bei 17° bestimmt, letztere ist zwischen 16° und 18° bestimmt. Die spec. Wärme der Chlornatriumlösung ist nach der Formel Schüller's (diese Annalen B. 136) berechnet.

Tabelle II.

	spec. G.	spec. W.	App.	v	k
Wasser	1	1	I.	0,03327	0,001040
			II.	0,02370	0,001161
			III.	0,01032	0,001416
Chlorkalium-Lösung 20 procent.	1,110	0,808	I.	0,03730	0,001115
			II.	0,02648	0,001236
			III.	0,01298	0,001680
Chlornatrium-Lösung 33,333 procent.	1,187	0,773	I.	0,03597	0,001085
			II.	0,02648	0,001249
			III.	0,01605	0,002103
Alkohol	0,795	0,600	I.	0,02026	0,000491
			II.	0,01589	0,000599
			III.	0,01108	0,001083
Schwefelkohlenstoff .	1,268	0,259	I.	0,02672	0,000595
			II.	0,02158	0,000744
			III.	0,01589	0,001376
Glycerin	1,220	0,612	I.	0,02418	0,000674
			II.	0,01582	0,000688
			III.	0,00615	0,000726

§. 6.

Wie sich aus der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle ergiebt, zeigen die Werthe k für die Wärmeleitungsfähigkeiten so große Differenzen bei den verschiedenen Apparaten, daſs sich aus diesen Werthen allein nicht ein Mal die Grenzen ermitteln lieſsen, innerhalb deren die wahren Werthe für die gesuchte Gröſse enthalten sind. Es lassen sich aber die Ursachen angeben, warum die Werthe bei den verschiedenen Apparaten so stark von einander abweichen, und auf Grund dieser ist es möglich, eine Correction anzubringen, welche, wie sich später zeigen wird, selbst einen Maaſsstab für ihre Genauigkeit abgiebt.

In §. 3 wurde hervorgehoben, daſs es nur mit besonderer Mühe gelungen ist, constante Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit zu erzielen, und zugleich der Umstand mitgetheilt, daſs die verschiedenen Apparate auch in verschiedenem Maaſse sich der Erreichung jener Constanz widersetzten. Die Rührer von der früher beschriebenen Form beeinfluſsten die Theile des ihrer Thätigkeit unterworfenen äuſsern Cylinders nicht gleichmäſsig; denn während der Cylinder-Mantel von dem Rührer berührt wurde, konnte die obere und untere Fläche des Cylinders nur eine geringe Einwirkung durch die Thätigkeit des Rührers erfahren. Trotzdem also die Werthe für die Abkühlungsgeschwindigkeit constant gefunden wurden, war doch die Wirkung der Rührer nur eine unvollkommene und dies um so mehr, je gröſser die Flächen des Cylinders gegenüber dem Mantel desselben waren. Dadurch daſs die Flächen nicht die volle Einwirkung des Rührers erfahren, haben dieselben während des Versuches eine etwas höhere Temperatur, als der Mantel, so daſs in jedem Falle bei allen Apparaten die gefundene Leitungsfähigkeit sich zu klein ergeben muſs. Der Einfluſs des unvollkommenen Rührens hängt aber auſser von dem Verhältniſs der Flächen des Cylinders auch noch von der Abkühlungsgeschwindigkeit ab. Je weniger rasch die Abkühlung vor sich geht, um so geringer ist die Temperaturdifferenz zweier benach-

barter Flüssigkeitsschichten nach demselben Zeitintervall, um so geringer wird auch überhaupt die Bedeutung des Rührens sein. Daher hat der Umstand, daſs alle Theile des äuſsern Cylinders nicht gleichmäſsig der Wirkung des Rührers unterworfen sind, um so mehr Einfluſs auf das schlieſsliche Resultat, je schneller die Abkühlung vor sich geht, so daſs die anzubringende Correction zugleich mit dem Verhältniſs der unteren und oberen Fläche zum Mantel des Cylinders und mit der Abkühlungsgeschwindigkeit wachsen wird.

Nennt man die wahre Wärmeleitungsfähigkeit K, die gefundene k, so kann man, wenn p das gedachte Verhältniſs und n eine Constante bezeichnet, setzen:

$$K = k + p \,.\, v \,.\, n.$$

Bildet man die den drei Apparaten entsprechende Gleichungen, nämlich

$$K = k_1 + p_1\, v_1 \,.\, n$$
$$K = k_2 + p_2\, v_2 \,.\, n$$
$$K = k_3 + p_3\, v_3 \,.\, n,$$

so läſst sich die Gröſse n in doppelter Weise bestimmen; wird dann mit dem Mittelwerthe von n K berechnet, so liefert die Uebereinstimmung dieser Werthe einen Maaſsstab für die Gültigkeit der Annahmen, die der gebildeten Gleichung zu Grunde gelegt sind. Es ist zu bemerken, daſs n für die verschiedenen Flüssigkeiten nicht gleich seyn kann, da die Gröſse der vorhin entwickelten Einflüsse auch von der Natur der Flüssigkeit abhängt. Da die verschiedenen Theile des äuſsern Cylinders nicht überall genau dieselbe Temperatur haben, so wird eine Strömung in der Flüssigkeit entstehen, und diese wird um so gröſser seyn, je kleiner der Reibungscoefficient und je gröſser der Ausdehnungscoefficient derselben ist.

In der folgenden Tabelle sind die Werthe von K, wie sie den einzelnen Apparaten entsprechen, zusammengestellt und der Werth von n, welcher nach den früheren Gleichungen zur Berechnung von K gedient hat, beigefügt.

	n	K für App. I.	App. II.	App. III.	Mittelwerth.
Wasser	0,0524	0,001509	0,001532	0,001523	0,001521
Chlornatrium - Lösung 33,33 pCt.	0,1681	0,002716	0,002577	0,002636	0,002643
Chlorkalium - Lösung 20 pCt. .	0,0795	0,001915	0,001865	0,001887	0,001889
Alkohol	0,1982	0,001501	0,001475	0,001487	0,001488
Schwefelkohlenstoff	0,1921	0,001979	0,001978	0,001979	0,001979
Glycerin	0,0104	0,000741	0,000737	0,000739	0,000737

Die Uebereinstimmung der für die einzelnen Apparate durch die Correction gewonnenen Werthe ist so grofs, als sie nur erwartet werden konnte; zwar erreicht die Differenz bei der Chlornatriumlösung 5 pCt.; es kann dies aber wegen der Gröfse von *n* und der danach sich bestimmenden Correction nicht auffallen. Die mitgetheilten Resultate werden überhaupt um so mehr Vertrauen verdienen, je kleiner die angebrachte Correction ist, so dafs die Werthe für Glycerin, Wasser und Chlorkalium-Lösung den andern gegenüber einen bedeutenden Vorzug haben.

Für die definitive Bestimmung der Werthe ist noch zu bemerken, dafs die Uhr, welche bei den Versuchen diente, um 1,22 pCt. zu langsam ging, so dafs 100 Secunden der Uhr gleich 101,22 wahren Secunden waren. Bringt man dieses Verhältnifs in Rechnung, so erhält man als schliefsliche Werthe für die *Wärmeleitungsfähigkeit bezogen auf 1 Centimeter und 1 Secunde* folgende:

Wasser	0,001540
Chlornatrium-Lösung, 33,333 pCt. . .	0,002675
Chlorkalium-Lösung, 20 pCt. . . .	0,001912
Alkohol	0,001506
Schwefelkohlenstoff	0,002003
Glycerin	0,000748

§. 7.

Lundquist giebt in der früher gedachten Abhandlung für Wasser den Werth 0,0933 an, bezogen auf 1^{ctm} und 1 Minute, welcher mit dem von mir gefundenen bis auf 1 pCt. übereinstimmt, da ich für dieselben Einheiten 0,0924 erhalte; man könnte diese kleine Differenz noch durch Temperaturverschiedenheiten erklären, da die Versuche von Lundquist sich auf die Temperatur 40° beziehen, während die meinigen dem Intervall 10° bis 18° angehören.

Außerdem hat auch Lundquist eine 30,6 procentige Chlornatrium-Lösung untersucht und findet für die Wärmeleitungsfähigkeit derselben 0,0895, während für eine wenig verschiedene Lösung ich in denselben Einheiten ausgedrückt 0,1605 erhalten habe. Den Grund für diese große Differenz weiſs ich nicht anzugeben; wenn auch, wie ich schon hervorgehoben habe, die Werthe, welche für Chlornatrium-Lösung gefunden wurden, nicht so sicher sind, als jene für Wasser, so glaube ich doch nicht, daſs sie mit einem solchen Fehler behaftet sind, wie zur Erklärung der vorliegenden Differenz nöthig wäre anzunehmen. Eine Vergleichung der in Tabelle II enthaltenen Werthe für Wasser und Chlornatrium-Lösung zeigt, daſs nicht nur die entsprechenden Werthe der Abkühlungsgeschwindigkeiten bei der Salzlösung immer die gröſsern sind, sondern auch die sich daraus ergebenden Wärmeleitungsfähigkeiten, so daſs jeder Apparat für die Salzlösung einen gröſsern Werth ergab, als für Wasser. Während also Lundquist für die Salzlösung eine kleinere Wärmeleitungsfähigkeit findet, als für Wasser, ergeben meine Versuche ganz unzweideutig eine gröſsere. Auch die beiden übrigen in der Einleitung genannten Forscher Paalzow und Guthrie widersprechen sich in Bezug auf die Leitungsfähigkeiten der Salzlösungen. Während Paalzow in Uebereinstimmung mit Lundquist findet, daſs eine Chlornatrium-Lösung schlechter als Wasser die Wärme leitet, behauptet Guthrie, daſs die Salze die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers erhöhen.

Ohne unbedingt die Behauptung aufstellen zu wollen, daſs die von Lundquist mit vieler Sorgfalt angestellten Versuche für die Chlornatrium-Lösung einen zu kleinen Werth ergeben haben, kann ich doch nicht umbin, das von mir gefundene Resultat in so weit für das wahrscheinlichere zu halten, daſs die Salzlösung besser als Wasser die Wärme leitet.

Da die übrigen von mir untersuchten Flüssigkeiten von Lundquist nicht behandelt sind, so läſst sich als Resultat der Vergleichung nur der Werth für die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers als definitiv bestimmt hinstellen.

Aachen, Juli 1874.

II. *Beitrag zur Kenntniſs der elastischen Nachwirkung bei Torsion; von F. Neesen.*

Das Phänomen der elastischen Nachwirkung blieb nach seiner Entdeckung durch W. Weber[1]) im Jahre 1841 längere Zeit ohne eine eingehende Untersuchung, trotzdem die elastische Nachwirkung bei allen Untersuchungen, bei welchen Drehungen eines an einem Faden aufgehängten Spiegels oder sonstigen Gegenstandes beobachtet werden, wie bei Galvanometern etc. als eine mehr oder weniger beträchtliche Fehlerquelle auftritt. Erst F. Kohlrausch nahm im Jahre 1862 die Untersuchung der eigenthümlichen Erscheinung wieder auf; er wies ihr Auftreten auch bei der Torsion nach. In zwei ausführlichen Arbeiten[2]) gab er ein Gesetz für die elastische Nachwirkung und zeigte die Abhängigkeit dieser Erscheinung nicht allein von den Bedingungen der Torsion, also vom Torsionswinkel und der Torsionsdauer, sondern auch von der Temperatur des

1) W. Weber. *Comm. Soc. Gott. Vol.* VIII. *p.* 45. Pogg. Ann. Bd. 34, S. 247.

2) F. Kohlrausch. Pogg. Ann. Bd. 129, S. 337 u. Bd. 128, S. 1.

tordirten Fadens. — Weiter sind über diesen Gegenstand meines Wissens nur zwei Arbeiten geliefert, eine theoretische von O. E. Meyer[1]) und zu gleicher Zeit eine Mittheilung von mir selbst[2]).

Zu der erneuten Aufnahme der von Kohlrausch so ausfürlich untersuchten Frage wurde ich durch den Versuch gedrängt, die Dämpfung der Schwingungen eines Fadens vermöge einer inneren Reibung im Faden selbst zu erklären durch die elastische Nachwirkung d. h. durch die fortwährende Verschiebung des Punktes, um welchen als Mittelpunkt die Schwingungen geschehen[3]). Diese Ansicht ist zuerst von W. Weber ausgesprochen. Selbstverständlich mufste zu diesem Zwecke das genaue Gesetz der elastischen Nachwirkung bekannt sein. Es ergab sich nun bei der Prüfung des Gesetzes von Kohlrausch, dafs meine Versuche nicht diesem entsprachen, vielmehr zunächst ein einfacheres Resultat lieferten. Ebenfalls wichen meine Versuche von dem Weber'schen Gesetz ab.

Weber giebt als Formel, welche seine Versuche auf's Vollkommenste darstellt:

$$x = \frac{C}{(t+a)^{\nu}}.$$

Die Formel von Kohlrausch lautet

$$x = ce^{-at^m}$$

In beiden bedeutet x den augenblicklichen Abstand des Fadens von der schliefslichen Ruhelage und t die Zeit. Die übrigen Gröfsen sind Constanten.

An Stelle dieser beiden Formeln ergaben meine Versuche die Formel:

$$x = ce^{-\beta t},$$

also für m in der vorletzten Gleichung den Werth 1, während die Versuche von Kohlrausch Werthe für m geben,

1) Meyer. Pogg. Ann. Bd. 151, S. 108.

2) Neesen. Monatsberichte der Akad. d. Wissenschaften zu Berlin, 12. Feb. 1874

3) Vergl. die angeführte Mittheilung in den Monatsberichten.

welche sich der Null nähern. Als Grund des Unterschiedes zwischen den beiden Messungen an tordirten Fäden ist möglicher Weise, wie ich in der früheren Mittheilung schon bemerkte, der Widerstand anzusehen, welchem das freie Eintreten der elastischen Nachwirkung bei den Versuchen von Kohlrausch begegnet in dem Eintauchen des zum Behuf der Beruhigung der Schwingungen an dem tordirten Faden befestigten Messingblech in Oel; und möglicher Weise in der verschiedenen Art der Anbringung der Torsion. *A priori* kann indeſs das Gesetz $x = ce^{-at^m}$ wegen eines widerstreitenden physikalischen Grundes nicht als wirkliches Naturgesetz der elastischen Nachwirkung angesehen werden. Dasselbe liefert nämlich zur Zeit $t = 0$, also im Momente der Aufhebung der Torsion bei dem von Kohlrausch benutzten Ausgangspunkt für die Zeit, einen unendlichen Werth für die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$. Es ist dieselbe

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax}{tn}.$$

a und x sind endliche Gröſsen, mithin ist für $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = \infty$. Eine unendliche Geschwindigkeit ist aber bei einer endlichen Bewegung in keinem Punkte der letzteren zu gebrauchen.

Fast gleichzeitig mit meiner Mittheilung vom Februar d. J. erschien der Aufsatz von O. E. Meyer über elastische Nachwirkung und Dämpfung der Schwingungen; ich kannte denselben damals noch nicht, da das Januarheft von Pogg. Ann. erst im März herausgegeben wurde. Meyer folgert aus der Annahme, daſs die Schwingungen eines Fadens oder eines Drahtes einen Widerstand vermöge innerer Reibung erfahren, welcher proportional der Geschwindigkeit ist, das Entstehen einer elastischen Nachwirkung, welche dargestellt wird durch das Gesetz

$$x = \Sigma_n^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{\frac{a}{t}\, 2n-1}.$$

β ist ebenfalls eine Function von n, deren Form ich später angeben werde. Nach diesem Gesetz besteht die elastische Nachwirkung aus einer Anzahl von Bewegungen, welche nach einfachen Exponentialcurven vor sich gehen.

Dieser theoretischen Folgerung entspricht mein Resultat $x = ce^{-\beta t}$; darnach würde man in obiger Summe mit dem ersten Gliede sich begnügen können. Die weiteren genaueren Versuche, deren Darlegung und Resultate ich im Folgenden geben will, bestätigen, daſs die elastische Nachwirkung nach einfachen Exponentialcurven vor sich geht, sie zeigen indeſs, daſs man mit einer einzigen nicht auskommt, sondern mindestens zwei Summanden aus obiger Summe nehmen muſs. Die Formel von Kohlrausch sowie die von Weber werden, wenn meine Formel als die richtigere befunden wird, nur sehr angenäherte Darstellungen des wirklichen Vorganges enthalten.

Ich gebe zunächst die Beschreibung des benutzten Apparates und die bei den Versuchen befolgte Untersuchungsmethode.

§. 1. Beschreibung des Apparates.

Der Apparat besteht aus einem Glascylinder A mit unten abgeschliffenem Rande Fig. 1 Taf. IV. Das obere Ende des Cylinders ist luftdicht verschlossen durch einen Messingdeckel B, der in der Mitte eine groſse Oeffnung hat. Diese Oeffnung wird verschlossen durch eine auf den Deckel aufgelöthete Stopfbüchse c, durch welche der Stift d hindurchgeht, an dem der zu untersuchende Faden befestigt wird. Zu diesem Zwecke befindet sich an dem unteren Ende von d ein Haken, um den der Faden fest geschlungen ist. d ist luftdicht in c drehbar und ebenso luftdicht auf und nieder zu schieben; an dem oberen Ende dieses Stiftes befindet sich eine Kreisscheibe e mit einer Theilung von 5° zu 5°. Vor derselben auf den Deckel B befestigt steht ein verticaler Zeiger f, mittelst dessen die Drehung von d und e abzulesen ist. Es ist diese Dre-

hung in den folgenden Versuchen nicht benutzt. Sie wurde zu den Vorversuchen angewandt. Auf dem Deckel *B* befindet sich noch eine Stopfbüchse *g* seitlich aufgeschraubt. Durch *g* geht ein längerer runder Messingstab *h*, der ungefähr bis zum unteren Ende des Cylinders herunterreicht. An dem unteren Ende verjüngt er sich etwas, an dem oberen ist ein Schraubengewinde *i* eingeschnitten. In dieses Schraubengewinde greift eine Mutter *k*, welche an dem oberen Ende der Stopfbüchse *g* um diese drehbar befestigt ist, so daſs sie sich um die Axe der Stopfbüchse drehen läſst, jedoch beim Drehen nicht von *g* herunter geht. Fig. 2 Taf. IV zeigt die betreffende Einrichtung. Wird die Mutter *k* gedreht, so hebt oder senkt sich also vermittelst des Schraubenganges *i* der Stab *h*. Dieser Stab hat an seinem oberen Ende noch einen Knopf mit angeschraubtem Zeiger, der an einer davorstehenden an *B* angeschraubten Kreistheilung die Gröſse einer etwaigen Drehung von *h* angiebt. Ziemlich an dem unteren Ende von *h* kann ein Kreissegment *m* von Messing mittelst Contremutter angeschraubt werden. Dasselbe dient dazu um vermittelst einer Drehung von *h* in der Stopfbüchse die Torsion des zu untersuchenden Faden zu bewerkstelligen. Dazu ist dieses Segment an seinem äuſseren Rande gezahnt. In die Zähne desselben fassen die Zähne eines kleinen Rades *n*, welches in der Mitte durch einen Stift *o* durchbohrt ist. Der letztere trägt an seinem oberen Ende eine Gabel *p*, wie in Fig. 3 Taf. IV zu sehen ist. Das untere Ende von *o*, sowie das untere Ende von *h* greifen in Löcher eines auf dem Boden stehenden Bleigewichtes. Dadurch wird erreicht, daſs bei einer Drehung von *h* auch das Rädchen *n* und die Gabel *p* sich drehen. An dem Gewicht, welches den untersuchten Faden spannt, ist nun ein Spiegel *s* und daran eine Nähnadel *r* befestigt. Diese letztere wird bei einem Emporziehen von *h* vermittelst Drehung der Schraube *k* von der mitgehobenen Gabel *p* gefaſst. Wird darauf *h* gedreht, so wird der Faden tordirt. Um diese Torsion aufzuheben, ist es nur nöthig,

h wieder herunterzuschrauben. Die Gröſse der gegebenen Torsion läſst sich mittelst des Zeigers *l* ablesen. Natürlicherweise passen das Segment *m* und der Kreis *n* so zusammen, daſs die Mitte der Gabel *p* gerade in die Mitte des Glascylinders unter dem Stifte *d* zu liegen kommt. Durch gehöriges Neigen des ganzen Apparates wird derselbe so gestellt, daſs die Verlängerung des untersuchten Fadens gerade durch die Drehungsaxe der Gabel *p* geht. Es läſst sich dann eine Torsion des Fadens herstellen ohne störende Erschütterung. Die Stopfbüchsen sind angebracht um auch im luftleeren Raume beobachten zu können.

Die Ablesung der Bewegung des Fadens geschah mit Spiegel und Scala. Zu dem Ende war der Glascylinder *A* an seinem unteren Ende durchbohrt und vor dieser Durchbohrung ein Tubulus *C* angeschmolzen, der mit einer planparallelen Glasplatte verschlossen ist. In der Höhe dieses Tubulus befindet sich der an dem spannenden Gewicht befestigte Spiegel. In den Deckel *B* ist schlieſslich noch ein Thermometer eingeschraubt, um die Temperatur im Innern des Apparates zu bestimmen.

Der vorstehend beschriebene Apparat ist in der rühmlichst bekannten Werkstatt des Dr. Meyerstein in Göttingen angefertigt. Er gehört in die Sammlung des physikalischen Instituts der Universität Göttingen. Ich fühle mich für die Anfertigung und Verleihung desselben dem Director des betreffenden Instituts, Hrn. Prof. W. Weber, sehr verpflichtet.

Die anscheinend complicirte Einrichtung um die Torsion hervorzubringen, habe ich einem leichteren Weg um dasselbe zu erreichen, wie ihn die Anwendung eines Magnetes geboten haben würde, vorgezogen, weil durch einen Magnet die auftretenden elastischen Erscheinungen mehr oder weniger, die elastische Nachwirkung fast ganz verdeckt werden, da die hinzutretende Richtkraft des Erdmagnetismus die elastische Nachwirkung ganz überwindet und die Dämpfung der Schwingungen sehr alterirt.

Zu dem obigen Kern des Apparates mufste noch eine Vorrichtung hinzugefügt werden, um eine constante Temperatur in jenem zu erhalten. Nach mehreren nicht befriedigend ausgefallenen Versuchen, dieselbe aus einer Mischung von bestimmten Mengen von kochendem Wasser und kaltem Wasser herzustellen, wandte ich das von Dupré benutzte Verfahren an, indem ich eine bestimmte Menge kalten Wassers von constanter Temperatur durch kochendes Wasser fliefsen liefs. Das so erhaltene Wasser von constanter Temperatur lief in ein Zinkgefäfs, in welchem sich der oben beschriebene Apparat befand. Das Zinkgefäfs war mit Watte umbunden; es befanden sich an demselben mehrere Hähne zum Ein- und Auslaufen des Wassers und Glasscheiben eingelassen, um die Drehung des Fadens beobachten zu können. Das nöthige Wasser von constanter Temperatur lieferte die Wasserleitung, deren Wasser eine genügende Constanz in der Temperatur zeigte. Um stets dieselbe Menge kalten Wassers durch das kochende Wasser zu führen, liefs ich das Wasser aus der Wasserleitung in ein Glas laufen und regulirte den Druck so, dafs stets etwas Wasser über den Rand des Glases auslief. Aus dem letzteren wurde Wasser mittelst eines feststehenden Hebers in ein Bleirohr geleitet, welches wasserdicht durch die Wandungen des Kochgefäfses ging, in welchem das heifse Wasser erhitzt wurde. Aus dem Bleirohr flofs das Wasser erst in ein Glasrohr und dann in das genannte Zinkgefäfs. Zwischen Heber und Bleirohr befinden sich 2 Hähne, um die Zuflufsmenge des Wassers zu reguliren. Da sich während des Versuches in dem zuströmenden Wasser Luftblasen entwickelten, welche den Zuflufs hemmten, so wurden an geeigneten Stellen verticale Röhren angesetzt, welche diese Luftblasen aufnahmen. Es erwies sich als vortheilhaft, das heifse Wasser nicht stark sieden zu lassen, weil in diesem Falle die Temperaturschwankungen des ausfliefsenden Wassers bedeutend waren. Mit Hülfe dieser Vorsichtsmafsregeln konnte bei einiger Aufmerksamkeit die

Temperatur des in das Zinkgefäfs einfliefsenden Wassers sehr constant gehalten werden. Die Schwankungen betrugen höchstens 0,02 bis 0,04 Grad.

Die Versuche wurden angestellt in den Räumen des hiesigen physikalischen Institutes, dessen Leiter, meinem verehrten Vorgesetzten, Hrn. Prof. Helmholtz, ich mich für die liberale Gewährung aller Hülfsmittel sehr verpflichtet fühle.

§. 2. Beobachtungsmethode.

Der oben beschriebene Apparat wurde auf eine Glasplatte gekittet, in das Zinkgefäfs gestellt, längere Zeit ruhig stehen gelassen, damit der angewandte Faden sich austordiren konnte und dann vor jedem Versuch Wasser von constanter Temperatur in das Zinkgefäfs eingeleitet. Nachdem durch dasselbe 1 – 2 Stunden lang der Faden in der betreffenden constanten Temperatur erhalten war, wurde der Versuch angestellt, indem vermittelst der Schraube *k* zuerst die Gabel *p* in die Höhe gehoben wurde, so dafs sie die Nadel *o* fafste. Dann wurde der Stab *d* so lange gedreht, bis im Fernrohr wieder derselbe Scalentheil erschien, welcher dort sich zeigte, so lange *o* frei war. So war der Faden nicht tordirt. Natürlich war zur Bestimmung dieses Scalentheiles gewartet, bis der Faden eine constante Lage angenommen hatte. Zu einer bestimmten an einem Chronometer abgelesenen Zeit wurde die Drehung von *h* und damit die Torsion des untersuchten Fadens bewirkt, dabei wurde darauf Acht gegeben, dafs die Zeit, während welcher gedreht wurde, bei allen Versuchen dieselbe war, 5″ vor bis 5″ nach der später angenommenen Anfangszeit für die Drehung. Die Gabel *p* wurde nach Vollzug dieser Drehung soweit heruntergeschraubt, dafs sie die Nadel nur noch eben festhielt, damit beim Lösen der Torsion durch ein zu oftes Drehen der Schraube *k* nicht zu grofse Erschütterungen hervorgebracht wurden. Nachdem die Torsion eine constante Zeit, in allen unten angeführten Versuchen 15′ lang ge-

dauert hatte, wurde die Nadel von der Gabel p gänzlich gelöst. Der Faden gerieth in Torsionsschwingungen, welche bei den untersuchten Substanzen sehr rasch abnahmen und schliefslich sich ganz beruhigten, während eine Bewegung des Fadens nach einer Seite, also elastische Nachwirkung, übrig blieb. Deshalb konnte auch die letztere beobachtet werden, ohne dafs ein äufseres störendes Beruhigungsmittel für Wegnahme der Schwingungen angewandt wurde. Die Entfernung der Spiegel von der Scala betrug bei den Versuchen mit Kautschuckfäden 775^{mm}; die Ablesungen können einen Fehler von 0,1 Scalentheile enthalten. Da die Correction, welche an die Scalentheile anzubringen ist, zur Reducirung auf Gröfsen, die den Bogen direct proportional sind, bei den gröfsten abgelesenen Ausschlägen kaum 0,01 Scalentheile beträgt, so sind die abgelesenen Scalentheile direct den Bogen proportional gesetzt und den Rechnungen zu Grunde gelegt.

Cocon- und Kautschuckfäden dienten zu den Versuchen. Da der erstere indefs eine zu grofse Nachwirkung zeigte, als dafs dieselbe mit Fernrohr und Scala abgelesen würde, aufserdem bei demselben eine unberechenbare Fehlerquelle eintrat, so habe ich mich bei den messenden Versuchen auf Kautschuckfäden beschränkt. Der angewandte Faden hatte eine Länge von 250^{mm}, einen Durchmesser von $1,3^{mm}$.

Vorbereitende Versuche zeigten bei Kupfer- und Eisendraht keine elastische Nachwirkung, wohl bei Bleidraht.

§. 3. Störungen der Beobachtungen.

Es ergaben sich bei den untersuchten Fäden, sowohl Cocon- als Kautschuckfäden bedeutende Störungen in der regelmäfsigen Bewegung, welche ihren Grund theils in äufseren Umständen, theils im Faden selbst hatten und leider nicht alle zu eliminiren sind. Beim Coconfaden war es vor Allem ein störender Einflufs von Aufsen, der mich wegen seiner Sonderbarkeit lange beschäftigte. Es zeigte sich nämlich, als die Scala durch Kerzenlicht er-

leuchtet wurde, die Erscheinung, dafs der Spiegel sich dem Lichte zudrehte. Dabei waren die Kerzenlichter über einen Meter vom Spiegel entfernt.

Bei der näheren Untersuchung ergab sich dieselbe Drehung auch bei einfallendem Tageslicht, sogar im möglichst luftverdünnten Raum. Allerdings war die genannte Bewegung um so lebhafter, je mehr Luft den untersuchten Faden und daranhängenden Spiegel umgab. Die ganze Bewegung hing von dem Spiegel allein ab, eine etwaige Aenderung des Fadens hatte nichts damit zu thun. Anfänglich war ich geneigt, aus verschiedenen Regelmäfsigkeiten dieser Drehung dazu getrieben, letztere direct dem Einflufs der auffallenden Lichtstrahlen zuzuschreiben. Jedoch konnte ich mich von der Richtigkeit dieser Ansicht nicht ganz überzeugen. Möglicher Weise ist die erwähnte Erscheinung auch ein Einflufs der die Lichtstrahlen begleitenden Wärme, welche die Luft an der den angeschmolzenen Tubulus verschliefsenden Glasplatte erwärmt und dadurch in Bewegung setzt. Die bewegte Luft dreht dann den Spiegel. Es liegen gegen diese Art der Erklärung einige Gründe vor, doch kann ich hier nicht näher darauf eingehen. Jedenfalls ist die erwähnte Störung, welche auch durch eingeschobene, Wärme absorbirende Substanzen nicht ganz aufgehoben wird, bei den Versuchen nicht zu vermeiden und tritt als unberechenbare Fehlerquelle auf. Wie schon erwähnt, wurden deshalb die messenden Versuche nicht an Cocon-, sondern an Kautschuckfäden angestellt. Derselbe empfiehlt sich aus mehreren Gründen. Erstlich zeigte er sich sehr elastisch. Unter denselben Umständen nahm die Torsionsruhelage nach den Versuchen dieselbe Stellung ein, wie früher. Dabei ist die Dämpfung der Schwingungen und die elastische Nachwirkung sehr bedeutend, doch lassen sich beide Phänomene mit Spiegelablesung verfolgen. Ein weiterer Vortheil ist der, dafs mit leichter Mühe aus einem Kautschuckfaden sich andere von beliebiger, natürlich geringerer Dicke herstellen lassen. Zu dem Ende braucht

der Faden nur in Wasser von 60° erwärmt, dann erkaltet und schliefslich ausgezogen zu werden. Neben diesen Vorzügen bietet Kautschuck auch bedenkliche Fehlerquellen, welche indefs mehr oder weniger bei den übrigen Substanzen, die in Frage kommen können, auch einzutreten scheinen. Erstens ist nämlich die elastische Nachwirkung von der Temperatnr abhängig, so dafs eine Unregelmäfsigkeit der Temperatur während des Versuches schon aus diesem Grunde die Beobachtung stört; zweitens, und dafs ist der schlimmste Feind der Regelmäfsigkeit, war die Torsionsruhelage bei allen untersuchten Kautschuckfäden von der Temperatur derselben in bedeutendem Maafse abhängig. Den Einflufs dieser Fehlerquelle suchte ich möglichst zu entfernen durch den oben beschriebenen Apparat, durch welchen eine constante Temperatur erhalten wurde. Ganz zu vermeiden ist derselbe indefs nicht, allein schon, weil der Kautschuckfaden sich selbst erwärmt durch den Verlust an Bewegungsmenge vermöge innerer Reibung. Namentlich auf die Bewegung des Fadens längere Zeit nach Aufhebung der Torsion wird der Temperatureinflufs störend einwirken, da erstere Bewegung selbst sehr klein ist und schliefslich nach $1-1\frac{1}{2}$ Stunden nur 1 Scalentheil während 5' beträgt. Doch zeigt die sehr gute Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werthen, dafs es mir gelungen ist, die Temperaturstörungen möglichst zu vermeiden. Es verbot sich wegen derselben ein tagelang andauernder Versuch, weil so lange die Temperatur nicht constant zu halten ist. Aufserdem wurde eine solche lange Beobachtung verhindert durch lokale Fehlerquellen, bedingt durch die Aufstellung des Ablesungsfernrohres. Der Apparat selbst, in dem der untersuchte Faden aufgehängt war, war auf einer an die dicke Aufsenwand eines der Zimmer im hiesigen physikalischen Institute befestigten Console aufgestellt. Das Zimmer ging nach Norden, nach dem Kastanienwäldchen hinaus. Diese Lage war sehr günstig, da einentheils die Zimmertemperatur sehr constant war, anderntheils das Zimmer nicht

unmittelbar an der Strafse lag. Allerdings zeigten sich doch noch beim Vorüberfahren entfernter Wagen kleine verticale Erschütterungen des Spiegels; dieselben bewirkten indefs keine Drehung des letzteren. Dagegen mufste das Ablesungsfernrohr, wenn auch auf einem schweren Dreifufs so doch direct auf dem Fufsboden des Zimmers aufgestellt werden. Das Zimmer ward anderweitig ebenfalls viel benutzt. Wenn nun auch während der Versuchszeit von 2 Stunden sich keine Störungen durch die Schwankungen des Fufsbodens beim Gehen ergaben, so verbot sich wegen dieser Aufstellung von selbst eine tagelange Beobachtung, wie dieselbe von Kohlrausch an einzelnen Fäden gemacht ist.

§. 4. Aufstellung einer angenäherten Formel für elastische Nachwirkung aus Beobachtungen bald nach Aufhören der Schwingungen.

In den nachstehenden Versuchen hat der Torsionswinkel stets dieselbe Gröfse von 70°. Die Torsionsdauer beträgt 15'. Der Anfang der Zeitrechnung ist in den Moment des Lösens verlegt, also in den Moment des Beginns der Schwingungen, sowie der elastischen Nachwirkung. Als Zeiteinheit dient die Secunde.

Die Schwingungen waren in 2—6 Minuten beendet, bei geringen Temperaturen früher als bei hohen. Doch wurden die Beobachtungen der elastischen Nachwirkung erst 10' nach Aufhebung der Torsion begonnen, um etwaige Störungen durch eine noch vorhandene aber nicht mehr sichtbare Schwingungsbewegung zu vermeiden.

Folgende Tabelle giebt eine Beobachtung wieder; in der ersten Columne stehen die Zeiten, in der zweiten die beobachteten Scalentheile, in der dritten die berechneten. Die vierte Columne enthält die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung.

Temperatur $\tau = 10,00°$.

t	x beobachtet	x berechnet	Differenz d
600″	42,3	42,2	− 0,1
660	37,5	37,7	+ 0,2
720	33,8	33,8	± 0,0
780	30,3	30,2	± 0,1
840	27,1	27,0	− 0,1
900	24,2	24,1	− 0,1
960	21,6	21,6	± 0,0
1020	19,3	19,3	± 0,0
1080	17,2	17,2	± 0,0

Die Werthe in der dritten Columne sind nach der Formel $x = ce^{-\beta t}$ erhalten. In derselben ist x von der schliefslichen Ruhelage an gerechnet. Da dieselbe, wie aus den vorhergehenden Paragraphen hervorgeht, nicht beobachtet werden konnte, so wurde sie aus den Ablesungen berechnet, indem denselben die allgemeine Formel mit beliebigem Anfangspunkt für x, nämlich $x = C + ce^{-\beta t}$ zu Grunde gelegt wurde. C bestimmt sich darnach aus der Gleichung

$$\frac{\log(x_1 - C) - \log(x_2 - C)}{\log(x_1 - C) - \log(x_3 - C)} = \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_3}.$$

Die Constanten wurden aus Combination verschiedener Tripeln von Beobachtungen berechnet. Für obige Beobachtung ist

$$c = 129,3 \quad \beta = 0,001865.$$

Die Uebereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Werthen ist sehr gut. Die Differenzen erheben sich nur in einem Falle über den möglichen Beobachtungsfehler und auch da nur um 0,1 Scalentheile, sie ist bei ihrem Maximum = 0,2 Scalentheile.

Ich führe zur Vergleichung noch einige Beobachtungstabellen an:

Temperatur $\tau = 10{,}04^0 - 10{,}00^0$.

t	x beobachtet	x berechnet	d
600	42,5	42,6	+ 0,1
660	38,0	38,1	+ 0,1
720	33,9	33,9	± 0,0
780	30,3	30,3	± 0,0
840	27,1	27,0	− 0,1
900	24,2	24,1	− 0,1
960	21,5	21,5	± 0,0
1020	19,1	19,2	+ 0,1
1080	17,0	17,1	+ 0,1

$x = 121{,}1\ e^{-0{,}001818\,t}$

$\tau = 29{,}20^0$.

t	x beobachtet	x berechnet	d
600	45,6	45,4	− 0,2
660	41,5	41,5	± 0,0
720	37,9	38,0	+ 0,1
780	34,5	34,7	+ 0,2
840	31,6	31,8	+ 0,2
900	29,1	29,0	− 0,1
960	26,5	26,6	+ 0,1
1020	24,4	24,3	− 0,1
1080	22,3	22,2	− 0,1
1140	20,4	20,3	− 0,1
1200	18,5	18,6	+ 0,1

$c = 111{,}1 \quad \beta = 0{,}001491$

Die Differenzen sind auch hier sehr gering, und abwechselnd positiv oder negativ. Ebenso in den folgenden beiden Tabellen:

$\tau = 18{,}00^0$.

t	x beobachtet	x berechnet	d
570	37,9	38,1	+ 0,2
630	33,7	33,6	− 0,1
690	29,7	29,7	± 0,0
750	26,2	26,2	± 0,0
810	23,0	23,1	+ 0,1
870	20,5	20,4	− 0,1
930	17,9	18,0	+ 0,1
990	15,8	15,9	+ 0,1
1050	13,9	14,0	+ 0,1
1110	12,5	12,4	− 0,1

$c = 125{,}1 \quad \beta = 0{,}002086$

$\tau = 36{,}4^0 - 36{,}36^0.$

t	x beobachtet	x berechnet	d
780	28,3	28,3	± 0,0
840	26,5	26,5	± 0,0
900	24,9	24,9	± 0,0
960	23,4	23,4	± 0,0
1020	21,9	21,9	± 0,0
1080	20,4	20,6	+ 0,2
1140	19,3	19,3	± 0,0
1200	18,2	18,1	− 0,1

Die Constanten der letzten Tabelle haben die Werthe $c = 64{,}7$ $\beta = 0{,}001061$.

Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung läfst in den angeführten Versuchen nichts zu wünschen übrig; bei den übrigen angestellten Versuchen, deren eine grofse Zahl vorlagen, zeigte sich dieselbe Uebereinstimmung. Ich kann natürlich nicht alle gefundenen Tabellen hier wiedergeben.

Die elastische Nachwirkung ist, wie Kohlrausch nachgewiesen und wie sich auch aus meinen früheren Versuchen ergeben hat, abhängig von der Temperatur. Aus den vorliegenden genaueren Versuchen bei constanter Temperatur suchte ich die Gesetze für die Abhängigkeit der Constanten in der Bewegungsgleichung von der Temperatur zu bestimmen und so zugleich zu erfahren, ob die von Kohlrausch aufgefundenen Gesetze auch für die Formel $x = ce^{-at}$ gelten.

Zu dem Ende wurden viele Versuche bei verschiedenen Temperaturen, so wie mehrere zur Controle bei derselben Temperatur angestellt. Die Temperaturen variirten in dem Intervall von 10° bis 36°. Es ist mir indefs nicht gelungen, eine Gesetzmäfsigkeit aus den einzelnen Versuchen herauszubringen; die Controlversuche bei denselben Temperaturen gaben zu abweichende Werthe für die Constanten. Der Einflufs der Temperatur auf die Erscheinung ist aber unleugbar. Um denselben deutlich

in's Licht zu stellen, führe ich zuvor einige Beobachtungen der Umkehrpunkte der Schwingungen an.

Wie ich schon früher erwähnt habe, verschwinden die Schwingungen bei geringen Temperaturen bei Weitem rascher wie bei hohen; dabei ist der augenblickliche Mittelpunkt, um welchen die einzelnen Schwingungen geschehen, zu gleichen Zeiten bei geringen Temperaturen viel weiter von der schliefslichen Ruhelage entfernt, als bei hohen Temperaturen. Die Schwingungsdauer variirt gleichfalls mit der Temperatur, sie steigt mit derselben. Der Torsionscoefficient wird darnach mit zunehmender Temperatur kleiner.

Ich gebe, um den bedeutenden Einflufs der Temperatur zu zeigen, nachstehend einige Tabellen der Umkehrpunkte. Die erste Columne enthält wieder die Zeiten der Umkehrpunkte, die zweite die beobachteten Umkehrpunkte, die dritte die Bogen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten. Wegen der kleinen Schwingungsdauer konnten nur ganze Secunden als Zeiten der Umkehrpunkte abgelesen werden.

$\tau = 10{,}00°$			$\tau = 36{,}40°$		
Zeit	Umkehrpunkte	Bogen	Zeit	Umkehrpunkte	Bogen
86″	430	30	85″	488	204
89	409	24	89	692	192
91	435	19	93	500	176
94	416	21	96	676	166
97	437	13	100	510	152
99	424	15	104	662	143
107	439		108	519	

$\tau = 10{,}60°$.

Zeit	Umkehrpunkte	Bogen
65″	409	61
67	470	48
70	422	47
73	469	36
75	433	36
78	469	26
80	443	26
83	469	

Der Unterschied bei Wechsel der Temperatur ist mithin sehr bedeutend. Dafs dieser Unterschied stets derselbe bleibt, erhellt aus folgenden 2 Beobachtungen, die zwei Wochen später an demselben Faden mit einem gleichen Torsionswinkel und gleicher Torsionsdauer angestellt wurden.

$\tau = 12{,}80^\circ$			$\tau = 34{,}00^\circ$		
Zeit x	Umkehrpunkte u	Bogen s	x	u	s
92″	431	12,2	219″	417	24,5
95	418,8	14,2	222	441,5	19,5
98	433	8	227	422	21
100	425	12	231	443	18
103	437	7	235	425	18,5
105	430	9	238	443,5	14,5
108	439	3	242	429	15,8
111	436	7	246	444,8	12,8
114	443		250	432	

Die Schwingungsdauer bei $12{,}80^\circ$ ist

$$T = 2{,}75'', \text{ bei } 34{,}00^\circ \; T = 3{,}88''.$$

Die Tabelle zeigt, dafs die Beruhigung der Schwingungen bei $34{,}00^\circ$ viel später eintritt, als bei $12{,}80^\circ$.

Deutlich lassen die angeführten Reihen den Einflufs der elastischen Nachwirkung auf die Schwingungen erkennen. Die Bogen nehmen nicht stetig ab, sondern werden bei einiger Kleinheit abwechselnd gröfser und kleiner. Dabei kehrt die Richtung der Verschiebung der Umkehrpunkte auf einer Seite um. Wenn sich so bei den Schwingungen ein regelmäfsiger bedeutender Einflufs der Temperatur zeigt, so ist derselbe bei der elastischen Nachwirkung allerdings auch ersichtlich, kann jedoch aus meinen Versuchen nicht in Gesetze gefafst werden. Ich gebe zur Motivirung dieses nachstehend eine Tabelle der für die verschiedenen Temperaturen berechneten Constanten c und β.

Die erste Columne enthält die Temperatur, die zweite die Werthe von c, die dritte die von β. In der vierten

und fünften Columne finden sich die Wege s und s_1 angegeben, welche vermöge der elastischen Nachwirkung der Faden bei den einzelnen Temperaturen in bestimmten Zeiten gemacht hat.

τ	c	β	von 600" — 1080"	von 780" — 1020"
10,00	129,3	0,001865	23,0	11,0
10,04 — 10,00	133,2	0,001899	23,4	11,2
10,41 — 10,03	121,1	0,001818	21,7	10,3
18,19 — 18,00	125,0	0,001749	22,8	
18,00 — 18,00	125,1	0,002080		
22,93 — 22,82	118,7	0,001453		11,1
22,96 — 23,0	129,6	0,001868	22,8	
29,24 — 29,4	113,4	0,001456	21,7	10,8
30,20	111,1	0,001491	21,1	
26,19 — 36,38	103,8	0,000983		9,9
36,4 — 36,36	114,7	0,001061		4,6

Ich füge noch folgende Tabelle für den Werth des Exponenten β aus einer gröfseren Anzahl von Beobachtungen hinzu; ich gebe in der Tabelle β multiplicirt mit 1000000.

τ	β . 1000000
1) 10,00	1865
2) 10,04 — 10,00	1899
3) 10,41 — 10,34	1818
4) 10,90	2043
5) 11,08 — 11,04	2113
6) 12,2 — 12,4	1577
7) 18,00	2086
8) 18,09 — 18,00	1749
9) 18,28 — 18,20	1750
10) 18,18 — 18,20	2145
11) 18,41 — 17,9	1924
12) 22,93 — 22,82	1433
13) 22,38 — 22,19	1724
14) 22,96 — 23,00	1868
15) 22,88 — 23,14	2012
16) 23,10 — 23,11	1923

	τ	$\beta . 1000000$
17)	29,39 — 29,32	1229
18)	29,40 — 29,22	1303
19)	29,24 — 29,40	1456
20)	29,20	1391
21)	29,29	1626
22)	36,19 — 36,38	983
23)	36,4 — 36,36	1056

Allerdings scheint β anfänglich bis 18° um einen bestimmten Mittelwerth zu schwanken und dann mit steigender Temperatur zu sinken, ferner scheint c mit steigender Temperatur ebenfalls abzunehmen. Jedoch sind die Differenzen für die Werthe dieser Constanten bei derselben Temperatur so grofs, dafs sich auf diese Werthe kein Gesetz aufbauen läfst.

Die Gröfse des zurückgelegten Weges während einer bestimmten Zeit fällt offenbar mit wachsender Temperatur.

Ueber die Abhängigkeit des Coefficienten von der Torsionsdauer und dem Torsionswinkel habe ich bisher keine Messungen bei constanter Temperatur angestellt, da ich kein bestimmtes Resultat für die Abhängigkeit von der Temperatur erhalten. Meine früheren Versuche ergaben, dafs β unabhängig ist von diesen beiden Bedingungen der Torsion, dafs c mit zunehmender Torsionsdauer und Torsionswinkel wächst. Kohlrausch hatte dasselbe Resultat gewonnen.

§. 5. Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung, welche 1—2 Stunden nach Aufhebung der Torsion noch vorhanden war.

Wenn sich die elastische Nachwirkung, wie im Vorigen gezeigt ist, etwa bis 20—25' nach der Aufhebung der Torsion sehr genau durch die Formel $x = ce^{-\beta t}$ darstellen läfst, so zeigt doch die Beobachtung des weiteren Verlaufes derselben, dafs diese einfache Formel nicht genügt. Für die Aufstellung einer umfassenderen Formel diente mir als Anhalt die von O. E. Meyer angegebene

mathematische Theorie. **Meyer** entwickelt, wie schon oben erwähnt wurde, aus der Annahme, dafs der Faden den Schwingungen einen Widerstand entgegensetze, welcher proportional der augenblicklichen Geschwindigkeit ist, eine Formel für die Schwingungsbewegung, aus deren Discussion sich ergiebt, dafs die Schwingungen allmählich aufhören können und nur noch eine einseitige Bewegung übrig bleibt. Diese einseitige Bewegung der elastischen Nachwirkung wird nach der Theorie dargestellt durch die Gleichung:

$$x = c\sum_{\frac{a}{b}}^{\infty} {}^{n} \frac{e^{-\beta t}}{2n-1}$$

β ist eine Function von n und den beiden proportionalen Factoren a und b der die innere Reibung darstellenden Glieder. Später komme ich auf die Form von β zurück.

Dieser Gleichung entspricht die oben gefundene Function $x = ce^{-\beta t}$. Umfafste dieselbe die ganze Bewegung, so könnte man mit dem ersten Gliede der obigen Summe auskommen. Da die Versuche ergaben, dafs der Schlufs der Bewegung der elastischen Nachwirkung nicht in der einfachen Exponentialformel enthalten ist, so versuchte ich, ob zwei Summanden aus jener Summe die Bewegung darstellten. Ich wandte also die Formel an

$$x = ce^{-\beta t} + c_1 e^{-\beta_1 t}.$$

Um nach derselben die Beobachtungen zu berechnen, nahm ich die beobachteten Scalentheile, welche abgelesen wurden, nachdem längere Zeit nach Aufhebung der Torsion verflossen war, und berechnete aus diesen das letzte Glied $c_1 e^{-\beta_1 t}$. Mit den so erhaltenen Werthen von c_1 und β_1 berechnete ich die Werthe von $c_1 e^{-\beta_1 t}$, für $t = 10'$ oder $11'$ etc. Diese wurden von den beobachteten Werthen abgezogen und aus der Differenz die Werthe der Constanten in $ce^{-\beta t}$ berechnet. Die Berechtigung zu dieser Rechnungsweise fand ich in der Eigenschaft der beobachteten Werthe kurz nach Aufhebung der

Torsion, sich sehr genau durch eine Exponentialcurve darstellen zu lassen, welche 20′ nach Aufhebung der Torsion nur noch wenig von ihrer Asymptote entfernt war. Es konnten deshalb die Werthe der ersten Curve $ce^{-\beta t}$ keinen grofsen Einflufs auf die später beobachteten Scalentheile haben. Es mufsten natürlich zu beiden Functionen die schliefsliche Ruhelage berechnet werden nach der früher angegebenen Formel.

Zur Prüfung der erweiterten Formel mufste ein zweiter Satz von Beobachtungen angestellt werden, da die ersten Beobachtungen, von denen ich im vorigen Paragraphen mehrere ausführlich angegeben habe, nicht weit genug ausgedehnt waren. Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen ist auch hier eine befriedigende, stellenweise aufserordentlich gute. Zur Beurtheilung dieser Uebereinstimmung ist noch zu beachten, dafs die Bewegung des Fadens manchmal, wie eine der nachstehenden Tabellen zeigen wird, Unregelmäfsigkeiten zeigte, die ich nicht eliminiren konnte.

Ich gebe zuerst eine Tabelle, welche dem ersten Satze von Beobachtungen entnommen ist. Bei Versuch 10 des vorigen Paragraphen hatte ich bis 1 Stunde nach Aufhebung der Torsion beobachtet. Die Columnen haben dieselbe Bedeutung wie früher:

Temperatur = 29,40 — 29,22.

t	x beobachtet	x berechnet	d
570	72,3	72,3	± 0,0
630	68,2	68,1	— 0,1
690	64,4	64,3	— 0,1
750	61,1	61,1	± 0,0
810	58,1	58,1	± 0,0
870	55,4	55,4	± 0,0
930	53,1	53,0	— 0,1
990	50,9	50,9	± 0,0
1050	48,8	48,9	+ 0,1
1110	47,1	47,0	— 0,1
1170	44,2	45,3	+ 0,1

$$x = 91,9\, e^{-0,002946\, t} + 70,8\, e^{-0,000436\, t}$$

Dieser Versuch zeigt demnach eine aufserordentlich genaue Uebereinstimmung der Beobachtung mit den berechneten x. Die erste Exponentialfunction giebt in der That für die späteren Zeiten, aus denen $c_1 e^{-\beta_1 t}$ berechnet ist, von 1620—3420″ keine stark beeinflussenden Werthe; denn schon bei $t = 1170''$ ist

$$91{,}9\, e^{-0{,}002941 \cdot 1170} = 2{,}9.$$

Die entfernteren Werthe von x lieferten ebenfalls eine aufserordentliche Uebereinstimmung mit den berechneten. Folgende Tabelle giebt dieselben wieder:

t	x beobachtet	x berechnet	d
1620	34,8	34,8	± 0,0
1920	30,5	30,5	„
2220	26,7	26,7	„
2520	23,5	23,5	„
2820	20,6	20,6	„
3120	18,1	18,1	„
3420	15,8	15,8	„

Aus dem zweiten Beobachtungssatze folgen nachstehend einige Tabellen:

Temperatur = 34,0 — 34,02.

t	x beobachtet	x berechnet	d
600	109,5	109,4	— 0,1
660	103,7	103,6	— 0,1
720	98,6	98,6	± 0,0
780	93,9	94,0	+ 0,1
840	89,8	90,0	+ 0,2
900	86,4	86,2	— 0,1
960	82,8	82,9	+ 0,1
1020	79,7	79,8	+ 0,1
1080	76,8	76,9	+ 0,1
1140	74,5	74,3	— 0,2
1200	71,8	71,9	+ 0,1
2400	41,3	41,4	+ 0 1
2700	36,0	36,0	± 0,0
3000	31,5	31,5	± 0,0
3300	27,5	27,7	+ 0,2
3600	24,0	24,4	+ 0,4
3900	21,0	21,4	+ 0,4
4200	18,3	18,2	— 0,1

$$x = 129{,}5\, e^{-0{,}003151 t} + 119{,}9\, e^{-0{,}000445 t}$$

Temperatur = 12,80°.

t	x beobachtet	x berechnet	d
600	101,6	101,6	± 0,0
660	96,5	96,6	+ 0,1
720	92,1	92,0	− 0,1
780	87,9	87,9	± 0,0
840	84,2	84,1	− 0,1
900	80,4	80,6	+ 0,2
960	77,4	77,3	− 0,1
1020	74,3	74,3	± 0,0
1080	71,4	71,5	+ 0,1
1140	69,0	63,9	− 0,1
1200	66,7	66,5	± 0,0

$$x = 962^{-0,002193t} + 96,5e^{-0,000420t}$$

$\tau = 25,00°$.

t	x beobachtet	x berechnet	d
660	61,8	61,8	± 0,0
720	58,7	58,4	− 0,3
780	55,1	55,3	+ 0,2
840	52,4	52,5	+ 0,1
900	49,7	49,9	+ 0,2
960	47,7	47,6	− 0,1
1020	45,6	45,5	− 0,1
1080	43,8	43,6	− 0,1
1140	41,8	41,8	± 0,0
1200	39,8	40,1	+ 0,3

$$x = 83,9e^{-0,002979t} + 69,9e^{-0,000524t}$$

Die letzte der drei Reihen stimmt nicht so gut, wie die ersten, wenn sie auch immer ein befriedigendes Resultat giebt. Es tritt bei ihr die Unregelmäſsigkeit in der Bewegung des Fadens auf, welche ich schon erwähnte, z. B. ist der beobachtete Weg zwischen 720″ und 780″ gröſser als der zwischen 660″ und 720″, während er, wenn die Bewegung ganz regelmäſsig vor sich gegangen wäre, jedenfalls kleiner seyn müſste.

Die vorstehenden Tabellen mögen genügen, die übrigen Versuche zeigen eine gleiche Uebereinstimmung mit dem Gesetz $x = ce^{-\beta t} + c_1 e^{-\beta_1 t}$. Die Aenderung der Coef-

ficienten mit der Temperatur habe ich auch für diese genauere Formel nicht bestimmen können. So ergaben sich für den Exponenten β_1 aus den entfernteren Stellen folgende Werthe: In der Tabelle ist β_1 mit 1000000 multiplicirt aufgeführt.

t	$\beta_1 . 1000000$	t	$\beta_1 . 1000000$
13,00	403	30,60	410
13,00	573	31,00	583
14,00	411	31,20	499
14,40	442	31,20	547
27,90	357	34,00	396
28,20	488	34,00	423
29,40	438	34,00	341
		34,00	443

Es scheinen diese Exponenten um einen Mittelwerth zu schwanken. Derselbe ist

$$\beta_1 = 0,000457.$$

Mit demselben wurde auf die oben angegebene Weise die ganze Schwingungsbewegung berechnet; es ergaben sich dann folgende Werthe für die Constanten β, c und c_1: Die erste Columne enthält die Temperatur, die zweite die mit 1000000 multiplicirten Werthe von β, die dritte die ebenfalls mit 1000000 multiplicirten Mittelwerthe von β_1, die letzten 3 Columnen enthalten die Werthe von c, c_1 und $c + c_1$.

τ	$\beta . 1000000$	$\beta_1 . 1000000$	c	c_1	$c + c_1$
12,80	2314	457	89, 9	102,2	192,1
13,00	2562	„	157, 1	107,3	259,4
13,90 — 14,20	2562	„	136, 4	114,4	230,8
14,40	2087	„	42, 3	21,9	64,2
27,90 — 27,82	2397	„	91, 8	121,0	212,8
28,12	3876	„	197, 9	114,8	312,7
30,60 — 30,40	1799	„	104,40	121,9	226,3
31,20	2622	„	94, 8	67,5	162,3
34,2	3012	„	94, 2	117,4	211,6
34,00	3152	„	119, 4	125,5	244,9
34,10 — 34,00	3061	„	99, 6	115,2	214,8

In dieser Tabelle läßt sich keine Regelmäßsigkeit erkennen, die einzelnen Beobachtungen bei denselben Tem-

peraturen weichen zu sehr von einander ab, so dafs aus den Mittelwerthen nichts geschlossen werden darf. Es scheint mir im Gegensatz zu den Aenderungen der Constanten in der einfachen Formel $x = ce^{-\beta t}$, der Exponent β mit der Temperatur zu wachsen. Doch dann müfste auch β_1 mit der Temperatur variabel sein.

Die letzte Columne ist hinzugefügt um die ganze Gröfse der elastischen Nachwirkung zu geben, dieselbe wird durch $c + c_1$ dargestellt. Auch hierin ist kein Gesetz zu erkennen.

Ebensowenig wie die Annahme der Constanz von β, auf eine gesetzmäfsige Abhängigkeit von der Temperatur geführt hat, ebensowenig ist eine solche erhalten, wenn die berechneten Werthe von β_1 direct der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt wurden. Folgende Tabelle enthält die hiermit berechneten Constanten:

t	$\beta \,.\, 1000000$	$\beta_1 \,.\, 1000000$	c	c_1	$c + c_1$
12,80	2933	521	160,4	114,6	275,0
13,00	2123	402	96,2	96,5	192,7
30,60 — 30,40	2974	524	83,9	69,9	153,8
34,00	3151	443	129,6	120,0	249,5
34,10	2621	341	113,1	105,3	218,4

Es ist mir somit nicht gelungen, die Abhängigkeit der Constanten der elastischen Nachwirkung von der Temperatur aufzufinden, ich denke die Versuche fortzusetzen, namentlich mit anderen Substanzen, deren Ruhelage nicht so sehr von der Temperatur abhängig ist, wie beim Kautschuck.

Die vorstehende Arbeit enthält indefs, wie ich nachgewiesen zu haben glaube, den experimentellen Beweis dafür, dafs die Bewegung der elastischen Nachwirkung sich aus einfachen Exponentialcurven zusammensetzt, dafs also die elastische Nachwirkung gefafst wird durch die Gleichung

$$x = \Sigma c e^{-\beta t}.$$

Sonach entspricht allerdings die theoretisch von

Meyer abgeleitete Formel den experimentellen Resultaten, jedoch tritt dabei zwischen diesen und den Folgerungen Meyer's eine Differenz auf. Während sich nämlich aus Meyer's Schlüssen ergiebt, dafs die Exponenten β der Exponentialfunctionensumme $\Sigma c e^{-\beta t}$ zwischen den Gränzen $\frac{a}{b}$ und $\frac{1}{2}\frac{a}{b}$ liegen, dafs also der kleinste Exponent höchstens ein halb mal so klein ist als der gröfste, zeigt die letzte Tabelle, dafs zwischen den aus den Versuchen berechneten Werthen von β und β_1 ein viel bedeutenderer Unterschied vorliegt. Jedoch sind die vorstehend geschilderten experimentellen Resultate untereinander nicht so übereinstimmend, als dafs wegen des letzterwähnten Punktes aus ihnen eine Entscheidung gegen die von Meyer aufgestellte Theorie der elastischen Nachwirkung getroffen werden könnte. Es müssen zu dem Zwecke noch umfassendere Versuche angestellt werden. Dabei kann noch auf einen anderen Punkt zur Prüfung der Theorie von Meyer geachtet werden. Der Exponent β ist nämlich durch folgende Gleichung nach der Theorie gegeben:

$$\beta = m b - \sqrt{m^2 b^2 - m^2 a^2}$$

b und a sind die proportionalen Factoren der Glieder in der Differentialgleichung der Bewegung, welche den Widerstand des Fadens ausdrücken. m ist $= \left(\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{\lambda}\right)^2$ worin λ die Länge des Fadens bedeutet und n den Modus, nach welchem in der Summe $\Sigma \frac{c}{2n-1} e^{-\beta t}$ summirt wird. Daraus geht hervor, dafs die Exponenten β von der Länge des Fadens abhängig sind. Ob dieses die Beobachtung wirklich ergiebt, kann ich erst zu constatiren suchen, wenn ich constante Resultate in Bezug auf die Temperatur erhalten.

Aus den 2 beobachteten Werthen von β lassen sich die Constanten a und b berechnen.

β hat einen Maximalwerth, wenn die Quadratwurzel

verschwindet, wenn also $mb = \frac{a}{b}$ ist. Dann hat β den Werth $\frac{a}{b}$. Darf man sich, wie bei den besprochenen Versuchen, mit 2 Exponentialfunctionen begnügen, so erhält man diese beiden ausgedrückt durch a und b, wenn man den gröfsten Werth von β gleich dem Maximalwerth setzt. Das folgende β_1 ergiebt sich, indem man das n, welches diesen Maximalwerth giebt, um 1 wachsen läfst. Aus $mb = \frac{a}{b}$ für den Maximalwerth folgt für n der Werth

$$n = \frac{\lambda \sqrt{a}}{\pi b} + \frac{1}{2}.$$

Setze ich nun in m für n die Gröfse $n + 1$ ein, also $\frac{\lambda \sqrt{a}}{\pi b} + \frac{3}{2}$, so erhalte ich β_1. Das giebt

$$\beta_1 = \left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 b - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{2\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cdot \frac{\pi}{\lambda}\, b^2}$$

$$= b\left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda} - \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b} + \frac{\pi}{\lambda}\right)}\right)$$

Sind β und β_1 durch die Beobachtung gegeben, so ergeben sich durch die Auflösung der Gleichungen füt β und β_1 nach n und b die Werthe der beiden letzten Gröfsen.

Berlin, 20. Juni 1874.

III. *Experimentaluntersuchung über das Verhalten nicht leitender Körper unter dem Einflusse elektrischer Kräfte;* *von Ludwig Boltzmann.*

(Auszug; die ausführlichen Abhandlungen befinden sich in den Bänden 66, 68 und 70 der Sitzber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien.)

Aus der durch Clausius, Maxwell und Helmholtz ausgearbeiteten Theorie des Verhaltens dielektrischer Nichtleiter im elektrischen Felde folgt eine merkwürdige Consequenz, die bisher nicht bemerkt worden zu seyn scheint, nämlich, dafs elektrische Kräfte auf einen Nichtleiter, ohne dafs sich derselbe elektrisirt, blofs vermöge seiner dielektrischen Polarisation, ganz erhebliche Anziehungen ausüben müssen; und zwar finde ich aus der Helmholtz'schen Theorie, dafs eine nicht leitende Kugel, wenn sie so klein ist, dafs bei Berechnung der Elektricitätsvertheilung in derselben das Feld als homogen betrachtet werden kann, $\frac{D-1}{D+2}$mal so stark angezogen werden mufs, als eine gleich grofse leitende Kugel unter Einflufs derselben Kräfte, wenn letztere isolirt und ursprünglich unelektrisch ist, so dafs sie nur durch Induction elektrisch wird. Hiebei ist D die von Maxwell so bezeichnete Gröfse, also identisch mit der von Helmholtz mit $1+4\pi\varepsilon$ bezeichneten. Ich nenne diese Gröfse die Dielektricitätsconstante des Isolators. Um diese Consequenz der Theorie zu bestätigen, stellte ich folgende Versuche an.

Es wurde eine Kugel aus dem zu untersuchenden isolirenden Materiale an vollkommen isolirenden Fäden an den einen Hebelarm einer sehr empfindlichen Drehwaage gehängt, deren anderer Hebelarm mit einem Spiegel aequilibrirt war, mittelst dessen in der bekannten Weise die kleinsten Drehungen der Drehwaage abgelesen werden konnten. In einiger Entfernung von der isolirenden Kugel

stand eine fixe Kugel, die durch Funken einer Influenzmaschine geladen und wieder entladen werden konnte. Die ganze Drehwaage befand sich in einer bis auf die erforderlichen Schlitze verschlossenen Schachtel aus Goldpapier, aus der nur die isolirende Kugel an ihrem Faden heraushing. Früher war sorgfältig geprüft worden, daſs weder der Faden, an dem die Kugel hing, noch die in der Schachtel befindlichen Bestandtheile eine Einwirkung erfuhren, daſs also der bei Elektrisirung der fixen Kugel eintretende Ausschlag der Drehwaage nur von der Wirkung der Elektricität der fixen Kugel auf die isolirende herrühren konnte. Daſs letztere nicht schon früher elektrisch war und sich auch nicht merklich dauernd elektrisirte, wurde constatirt, indem die fixe Kugel bald mehrmal nacheinander positiv, bald abwechselnd positiv und negativ geladen wurde. Genau an die Stelle der nicht leitenden Kugel konnte eine gleichgroſse leitende (ursprünglich unelektrische) Kugel gehängt werden, um die Einwirkung, welche beide erfuhren, zu vergleichen. Wenn auch die Schlagweite gleich blieb, so war es doch nicht möglich, der fixen Kugel bei den verschiedenen Versuchen, die theils nach Einhängung der isolirenden, theils nach Einhängung der leitenden, aber isolirten Kugel gemacht wurden, immer genau dieselbe Elektricitätsmenge zuzuführen. Um den daherrührenden Fehler corrigiren zu können, war die fixe Kugel mit einer zweiten fixen leitend verbunden, der eine ganz ähnliche Drehwaage (aber mit leitend mit der Erde verbundener Kugel) gegenüber stand.

Der Ausschlag der zweiten Drehwaage diente als Maaſs der mitgetheilten Elektricitätsmenge. Das Verfahren war nun folgendes: In die erste Drehwaage wurde die nicht leitende Kugel eingehängt. Nun lieſs man einen Funken überspringen, welcher zunächst die beiden fixen Kugeln elektrisirte. Durch ihre Wirkung auf die hängenden geriethen die beiden Drehwaagen in Schwingungen. Da sie nicht rasch genug zur Ruhe kamen, wurde ihr Ausschlag in bekannter Weise aus mehreren Ablesungen berechnet.

Da die Ausschläge sehr klein waren, konnten sie als der Kraft proportional betrachtet werden. Den Ausschlag der ersten, dividirt durch den der zweiten Drehwaage, bezeichne ich kurz als „die Anziehung der isolirenden Kugel“. Jetzt wurde an die Stelle der nichtleitenden die gleichgroſse leitende Kugel gehängt. Der Ausschlag der ersten Drehwaage, dividirt durch den der zweiten, soll jetzt „die Anziehung der leitenden Kugel“ heiſsen. Der Quotient der Anziehung der nichtleitenden Kugel in die der leitenden ist jedesmal die in der folgenden Tabelle angeführte Zahl. Derselbe soll immer mit E bezeichnet werden. Die Zahlen dieser Tabelle geben also an, um wie vielmal die leitende, aber isolirte Kugel stärker angezogen wird als eine gleich groſse unter denselben Umständen befindliche nichtleitende. Dieser Quotient war oft von der Zeit der Einwirkung abhängig, ein Phänomen, welches ich als die elektrische Nachwirkung, Faraday als elektrische Absorption bezeichnet.

	Zeit der Einwirkung				
	0',9	1',8	22½'	45'	90'
Schwefel	—	2,125	—	2,110	—
Hartgummi . . .	—	2,064	—	2,094	—
Paraffin , . . .	2,980	2,920	—	1,420	—
Colophonium , .	2,140	1,927	1,730	1,700	1,650

Um schon aus dieser vorläufigen Notiz eine beiläufige Schätzung der von mir erzielten Genauigkeit möglich zu machen, theile ich die Details für die erste in der obigen Tabelle enthaltene Mittelzahl mit. Die Anziehung der Schwefelkugel 5 mal gemessen ergab sich zu

$$\overset{+}{0{,}560},\ \overset{+}{0{,}547},\ \overset{-}{0{,}548},\ \overset{-}{0{,}562},\ \overset{+}{0{,}559}\quad \text{Mittel } 0{,}555.$$

Die Anziehung der gleich grofsen leitenden Kugel aber war

+	+	—	—	+	
1,175,	1,180,	1,188,	1,173,	1,179	Mittel 1,179.

Die darüber stehenden Zeichen geben an, mit welcher Elektricität die fixen Kugeln geladen wurden. Der Quotient E ist

$$\frac{1.179}{0.555} = 2.125.$$

Nach der Dielektricitätstheorie sollten die in der obigen Tabelle enthaltenen Zahlen den Werth $\frac{D+2}{D+1}$ haben; also wenn man die aus des ersten Versuchsreihe von mir gefundenen Zahlen zu Grunde legt

für Schwefel	2,06
für Hartgummi . . .	2,39
für Paraffin.	3,28
für Colophonium . , .	2,93.

Die Zahl für Schwefel zeigt eine genügende Uebereinstimmung; für denselben scheint also D innerhalb weiter Gränzen constant zu seyn. Hartgummi wird bereits merklich stärker angezogen; für denselben scheint also D, folglich auch ε mit wachsender Ladung zu wachsen. Noch weit mehr gilt dies vom Colophonium und Paraffin, und zwar ist bei den beiden letzten D von der Zeit der Einwirkung abhängig. Je länger die elektrischen Kräfte wirken, desto bedeutender wird die dielektrische Polarisation. Leider gestattete mein, in Eile zusammengestellter Apparat in dieser Hinsicht keine sehr grofse Mannigfaltigkeit; auch konnte ich die Stärke der elektrisirenden Kraft nicht genügend variiren, um mit der Drehwaage allein die Abhängigkeit des D von derselben zu constatiren. Ich glaube aber, dafs meine Methode, die Anziehung isolirender Körper durch elektrische Kräfte zu prüfen, unter den verschiedensten Verhältnissen durchgeführt, im Stande wäre, noch reichen Aufschlufs über das bisher so wenig erforschte Verhalten der Isolatoren im elektrischen Felde

zu liefern. Ich machte später Versuche, wobei der zu den fixen Kugeln führende Draht in der Weise isolirt an eine schwingende elektromagnetische Stimmgabel befestigt war, daſs er in der Sekunde über 100 mal an die positive und ebenso oft an die negative Elektrode der Influenzmaschine stieſs, so daſs auf die zu untersuchende Kugel rasch abwechselnd bald positive bald negative Elektricität wirkte. Die Anziehung der dielektrischen Kugeln, die sich hiebei ergab, stimmte auch bei Hartgummi, Paraffin und Colophonium mit der theoretisch berechneten.

Ich führte diese Arbeiten im Laboratorium des Hrn. Prof. Töpler zu Graz aus, dem ich für die Zuvorkommenheit, mit der er mir die Räumlichkeiten, Apparate etc. zur Verfügung stellte, den wärmsten Dank sage. Zu besonderem Dank bin ich auch noch Hrn. Dr. Albert v. Ettingshausen, Assistenten für Physik an der Grazer Universität, verpflichtet, welcher mich sowohl bei der Zusammenstellung der Apparate, als auch bei den Ablesungen (da immer in zwei Fernröhren gleichzeitig abgelesen werden muſste) mit nicht geringen Opfern von Zeit und Mühe unterstützte.

Die hier mitgetheilten Zahlen gewinnen ein erhöhtes Interesse, wenn sie mit der Arbeit Maxwell's *„A dynamical theory of the electromagnetic field"*, *Transactions of the Royal Society of London* 1865, *Part I, pag.* 459 verglichen werden. Daselbst stellt nämlich Maxwell die Hypothese auf, daſs Licht und Elektricität verschiedene Bewegungsformen eines und desselben Mediums sind, die sich beide aus den Bewegungsgleichungen, die er für jenes Medium aufstellt, ableiten lassen.

Aus diesen Bewegungsgleichungen folgt zwischen der Dielektricitätsconstante D und dem Brechungsindex i irgend einer Substanz die Relation

$$i = \sqrt{D\mu}$$

(siehe Maxwell's Gleichung 80). μ ist der Coefficient der magnetischen Induction der betreffenden Substanz.

Derselbe ist allerdings für keine der von mir untersuchten Substanzen bekannt. Doch läfst sich leicht zeigen, dafs er unmöglich erheblich von dem der Luft verschieden seyn kann; dafs er also nahe gleich Eins ist, wenn man wieder den für Luft gleich Eins setzt.

Man findet leicht, dafs eine Kugel von unendlicher Magnetisirungsconstante im nahe homogenen Felde $\frac{\mu+2}{\mu-1}$ mal so stark angezogen wird, als eine gleich grofse von der Magnetisirungsconstante μ. Nun wird aber eine Eisenkugel nach allen Beobachtungen viel stärker als 10000 mal so stark angezogen, als eine gleich grofse Wismuthkugel abgestofsen wird. Da zudem die Magnetisirungsconstante des Eisens jedenfalls nicht unendlich ist, so folgt, dafs für Wismuth jedenfalls $\frac{\mu+2}{1-\mu} > 10000$, folglich μ um weniger als 0,0003 von der Einheit verschieden ist.

Da wir hier alle Verhältnisse viel zu ungünstig annahmen und $\pm(\mu-1)$ für meine Substanzen jedenfalls noch viel kleiner als für Wismuth ist, so kann wohl über die verschwindende Kleinheit dieser Gröfse kein Zweifel obwalten. Es ist also für die von mir untersuchten Substanzen $\mu = 1$ zu setzen und es müfste nach der Maxwell'schen Ansicht über das Wesen des Lichts und der Elektricität der Brechungsexponent einfach die Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstante seyn. Um diese Consequenz aus meinen Versuchen zu prüfen, stelle ich in der folgenden Tabelle die Quadratwurzeln von D mit den Brechungsexponenten i der betreffenden Substanzen zusammen:

	$\sqrt{D}$	i
für Schwefel . . .	1,960	2,040
für Colophonium .	1,597	1,543
für Paraffin . . .	1,522	1,538, 1,516
für Hartgummi . .	1,778	—

Der von mir nach der Wollaston'schen Methode be-

stimmte Brechungsexponent des wahrscheinlich doppeltbrechenden Paraffin fiel merkwürdiger Weise verschieden aus, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Reflexionsebene polarisirt war. Ersterem gehört der grösere, letzterem der kleinere der angeführten Brechungsexponenten an. Ich glaube, dafs die Differenzen dieser Zahlen nicht so grofs sind, dafs sie nicht aus den bei Bestimmung der Dielektricitätsconstanten unvermeidlichen Fehlern erklärt werden könnten, besonders da D für eine und dieselbe Substanz jedenfalls nicht absolut constant ist. Dafs ich die Dielektricitätsconstante für den Schwefel etwas zu klein fand, liefse sich ganz gut aus den Hohlräumen erklären, die sich in meinen Schwefelplatten thatsächlich vorfanden. Auch von der Dielektricitätsconstante des Colophoniums kann wegen der grofsen Schwierigkeit, gleich dicke Colophoniumplatten mit erträglich ebener Oberfläche zu erzeugen, keine allzugrofse Genauigkeit erwartet werden. Durch die auseinandergesetzte Methode wurde ich in Stand gesetzt, auch solche Substanzen auf ihre Dielektricitätsconstante zu untersuchen, welche nicht in Form grofser Platten erhalten werden können. Dadurch gelang es mir, der elektromagnetischen Lichttheorie eine neue Bestätigung zu verschaffen. Nach dieser Theorie mufs nämlich die Constante anisotroper krystallisirter Körper verschieden ausfallen, je nachdem die elektrischen Kräfte in verschiedenen Richtungen darauf wirken und zwar in einer Weise, welche sich aus den optischen Eigenschaften genau vorherbestimmen läfst. Unter allen doppelt brechenden Krystallen fand ich bisher nur einen, den Schwefel, welcher so vollkommen isolirt und so wenig dielektrische Nachwirkung zeigt, dafs er sich zur Untersuchung eignet. Der Geschicklichkeit des Optikus Hrn. Steeg in Homburg verdanke ich zwei aus natürlichen Schwefelkrystallen geschliffene Kugeln, die mich vollkommen befriedigten. Die Bestimmung der Lage der optischen Axen in denselben verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. v. Lang. Ich untersuchte beide Kugeln, indem ich

die Elektricität bald in der Richtung der Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen, bald in der des stumpfen und bald senkrecht auf beiden wirken liefs; ich will diese Richtungen der Reihe nach kurz als die Richtungen *A*, *C* und *B* bezeichnen. Die Mittelwerthe der von mir mit *E* bezeichneten Gröfse, welche sich nach den verschiedenen Richtungen ergaben, sind in der folgenden Tabelle mit den aus der Maxwell'schen Theorie folgenden zusammengestellt. Wo mehrere Versuchsreihen gemacht wurden, sind den Mittelwerthen in Klammern die extremsten beigefügt.

	theoretisch.	experimentell	
		1. Kugel.	2. Kugel.
Richt. *A*.	1,82	1,79 (1,73, 1,82)	1,805 (1,80, 1,81)
Richt. *B*.	2,04	2,02	2,00
Richt. *C*.	2,16	2,06 (2,04, 2,07)	2,07 (2,03, 2,10)

Der theoretischen Berechnung wurden die von Prof. Schrauf bestimmten Brechungsquotienten krystallisirten Schwefels zu Grunde gelegt. Um eine gröfsere Uebereinstimmung zu erzielen, müfste die Kugel mit gröfserer Sorgfalt richtig eingehängt werden: am besten würde man die Lage der optischen Axen gegen die Wirkungsrichtung erst während sie hängt bestimmen. Es wurde mit grofser Sorgfalt constatirt, dafs die beobachtete Asymmetrie nicht in zufälligen äufseren Ursachen ihren Grund hat, worüber ich jedoch auf die ausführliche Abhandlung verweisen mufs. Ich bemerke noch, dafs hiermit auch definitiv entschieden ist, dafs das Licht senkrecht zur Polarisationsebene schwingt.

Ich stellte aufserdem nach derselben Methode noch einige Versuche mit Paraffinkugeln an. Auch die Gröfse der Paraffinkugeln war dieselbe. Doch war mit besonde-

rer Sorgfalt darauf gesehen, dafs dieselben möglichst genau die Kugelgestalt hatten. Die Abweichungen der Längen der verschiedenen Durchmesser wurden mit einem Mikroskope mit Ocularmikrometer gemessen und die Rechnung ergab, dafs, wenn die Kugel ein Ellipsoid gewesen wäre, dessen verschiedene Durchmesser dieselben Abweichungen gehabt hätten und dies Ellipsoid bei Berechnung der dielektrischen Fernwirkung als Kugel von gleichem Volumen in Rechnung gezogen worden wäre, dies keinen bemerkbaren Fehler veranlafst hätte. Die beiden wirkenden Kugeln wurden alternirend geladen, wobei sie aber mit zwei Quadranten eines Kirchhoff'schen Elektrometers verbunden waren; der bewegliche Theil (Waagbalken) dieses Elektrometers war nicht aus Aluminiumdraht, sondern aus einer halbleitenden Substanz (Pappe), so dafs die alternirende Ladung auf ihn nicht wirkte, wohl aber mufste er durch den etwaigen Ueberschufs einer Elektricität abgelenkt werden. Mittelst dieser Vorrichtung wurde constatirt, dafs auch jener Ueberschufs keinen schädlichen Einflufs auf das Resultat haben konnte. Drei Versuchsreihen ergaben für die in der citirten Abhandlung mit E bezeichnete Gröfse die Werthe: 3,267, 3,213, 3,220, Mittel 3,233, woraus sich die Dielektricitätsconstante des Paraffins gleich 2,343 ergiebt.

Aufserdem untersuchten die HH. Romich, Novak und Faydiga, studd. phil. an der Grazer Universität, die dielektrische Anziehung von Schwefelkugeln, die mit einer dünnen Harz- oder Paraffinschicht überzogen waren und von Paraffinkugeln, die mit einer Harzschicht bekleidet waren. Wenn die Schicht nicht zu dick war, so war die dielektrische Anziehung dieselbe, als ob jene Schicht nicht vorhanden gewesen wäre. Endlich untersuchten die genannten Herren noch vier Kugeln aus Kalkspath, Glas, Flufsspath und Quarz und Selen. Die Dielektricitätsconstanten dieser Substanzen stimmten nicht mit der Maxwell'schen Theorie, sondern waren durchaus gröfser. Bei allen diesen Substanzen zeigte sich jedoch eine Ab-

hängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Zeit der Einwirkung, also dielektrische Nachwirkung. Da diese nun bei den dielektrischen Versuchen nicht unter $\frac{1}{300}$ Sekunde lag, bei den Lichtschwingungen aber viel kleiner als ein Billionstel Sekunde ist, so wird hieraus die Nichtübereinstimmung begreiflich.

Ich stelle zum Schlusse die Mittelwerthe der Dielektricitätsconstanten zusammen, wie sie sich erstens aus meinen nach Faraday's Methode mittelst eines Condensators angestellten Versuchen, zweitens aus meinen Versuchen über dielektrische Fernwirkung auf kleine Kugeln, drittens aus der elektromagnetischen Lichttheorie ergeben:

	aus d. Cond. versuchen.	aus d. diel. Fernwirk.	aus d. el. magn. Lichttheorie.
Schwefel . . .	3,84	3,94	4,06
Paraffin . . .	2,32	2,32	2,33
Colophonium . .	2,55	2,48	2,38
Hartgummi . .	3,15	3,48	—

IV. *Ueber das Spiel der Elektrophormaschinen und die Doppelinfluenz; von P. Riefs.*

(Ak. Monatsber. Novbr. 1873.)

Wie im gewöhnlichen Leben die Verwunderung über eine neue Erscheinung gern den Ausdruck gebraucht, es gehe dabei nicht mit rechten Dingen zu, so hat die erste Betrachtung der Wirkung einer Holtz'schen Elektrophormaschine die Meinung hervorgerufen, sie beruhe auf Etwas Geheimnifsvollem, der Elektricitätslehre bis dahin Unbekanntem. Ich bin dieser Meinung entgegengetreten, indem ich versuchte, das Spiel jener Maschine aus der bekannten Wirkung des Elektrophors und andern bekannten Erfahrungen abzuleiten (Akad. Berichte 1867, S. 185), wo-

bei ich bemerkt habe, dafs durch diese Ableitung das Verdienst der Erfindung der Maschine nicht geschmälert werde. Es ist gewifs mindestens ebenso verdienstlich, bekannte Erfahrungen auf eine sinnreiche Weise zu einer neuen Gesammtwirkung zusammenzustellen, als, was nur durch Zufall geschehen kann, eine neue Wirkung einer Naturkraft aufzufinden.

Jetzt, nach Verlauf von sechs Jahren, ist zwar meine Ansicht der Holtz'schen Maschine fast allgemein angenommen worden, aber in den Beschreibungen ihres Spiels findet sich manches Unrichtige, manche Unklarheit, die besonders die Theile der Maschine betrifft, die dem Elektrophore entsprechen. Eines Theils kann daran der Umstand schuld sein, dafs meine oben angeführte Erklärung, vier verschiedene Elektrophormaschinen umfassend, als Anhang erschien zu einer Untersuchung der Doppelinfluenz und diese daher in den Vordergrund gestellt wurde, mein zweiter Aufsatz über diese Maschinen (Ak. Ber. 1869, S. 861) historischen Inhalts war, und der dritte (Ak. Ber. 1870, S. 1) wie der vierte (Pogg. Ann. Bd. 140, S. 168) specielle Einrichtungen der Holtz'schen Maschine zum Gegenstand hatte. Anderntheils aber scheint mir durch jene Unklarheit angezeigt, dafs hier und da ein seltsamer Irrthum herrscht in Bezug auf den einfachen Elektrophor, den ich zur Sprache bringen möchte.

Der zu zeitweiligem Gebrauche dienende Elektrophor besteht aus einer ruhenden elektrisirten Platte und einer ihr parallel nahestehenden beweglichen Metallplatte. Der Stoff der elektrisirten Platte, ob leitend oder nicht, ist völlig gleichgültig; es wurde im vorigen Jahrhundert dazu von Wilcke Glas, von Volta Harz, von Weber Leinwand, Tuch, Papier, Leder, Plüsch, von Nicholson Messing, in diesem Jahrhundert Hartkautschuck, von Belli Eisen, von Töpler Stanniol gebraucht. An dem bekanntesten zu dauerndem Gebrauche bestimmten Elektrophore besteht die elektrisirte Platte aus einem Harzkuchen, und wenn ich deshalb, um die Bezeichnung zu verkürzen und

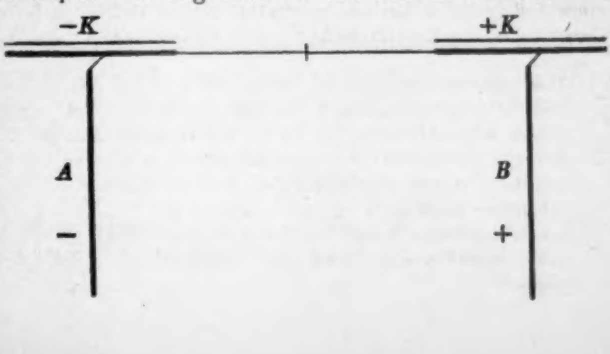
das Verständniss zu erleichtern (Ak. Ber. 1867 S. 194) die *elektrisirte Platte* als *Kuchen* bezeichnete und zu bezeichnen fortfuhr, so konnte damit nicht gemeint seyn, daſs sie aus nichtleitendem Stoffe bestehen müsse; schon auf der folgenden Seite ist von einem „Metallkuchen" die Rede. Als den dem Harzkuchen entsprechenden Theil der Holtz'schen Maschine, den ich Papierkuchen nenne, betrachte ich daher *nicht* das Glasstück, das vom Papiere bedeckt wird, *nicht* das davorliegende Stück der rotirenden Scheibe, sondern das Papier allein, das selbstverständlich, um elektrisirt bleiben zu können, auf einem isolirenden Stoffe befestigt seyn muſs.

Die Holtz'sche Maschine ist jetzt in Vieler Händen, zu ihrer wissenschaftlichen Benutzung ist eine vollständige Kenntniss ihres Spiels nöthig, das ich noch einmal und zwar in anschaulicher Weise darzulegen, für nützlich halte. Ich werde dabei nur die einfachste mit zwei Kämmen und Kuchen versehene Maschine betrachten und verweise zur Erläuterung der Maschine mit 4 und der mit 3 Kämmen auf den dritten und vierten der oben angegebenen Aufsätze. Es scheint mir zu leichterem Verständniss und zur Fernhaltung jeder irrigen Vorstellung gerathen, die Maschine nicht als gegeben zu betrachten, sondern sie allmählich aus dem einfachen Elektrophore entstehen zu lassen.

Es sey ein Papierblatt — *K* (man denke an der Figur die nicht genannten Theile fort), auf eine Glasplatte gleicher Grösse geklebt, in einer Vertikalebene festgestellt. Der Papierseite nahe sey eine ihr parallele Metallplatte gleicher Gröſse am Ende eines Glasstabes befestigt, der um eine an seiner Mitte normal angesetzte horizontale Axe drehbar ist. — Wenn die Platte dem Papiere gerade gegenübersteht, werde sie von einem festliegenden isolirten Metallstabe (der Elektrode) *A* berührt. Dem Papiere sey negative Elektricität mitgetheilt worden; es bildet nun den negativ elektrischen Kuchen eines einfachen Elektrophors, dessen Schild, die drehbare Metallplatte, die positive Elek-

tricitätsmenge $+a$, der ihn berührende Metallstab A die negative Menge $-a$ erhält. Letzte kann sogleich benutzt werden. Um die positive Elektricität zu benutzen, sey ein isolirter Metallstab (die Elektrode) B dem ersten parallel und in derselben Horizontalebene festgelegt, und der Schild, durch Drehung des Glasstabs zur Berührung mit B gebracht. Da während dieser Drehung Zeit vergeht, in welcher die Elektricität des Schildes durch Zerstreuung den Theil n verliert, so erhält B nur die Menge $(1-n)a = ra$, wo $r < 1$. Von den beiden durch den Elektrophor erregten gleichen Elektricitätsmengen wird also an der Elektrode A die Menge $-a$, an der Elektrode B die kleinere Menge $+ra$ benutzt.

Gröſsere Elektricitätsmengen werden gewonnen, wenn auch der Elektrode B gegenüber ein Papierblatt $+K$ vertikal befestigt und mit positiver Elektricität versehen wird. Der positiv elektrische Kuchen $+K$ giebt dann dem Schilde die Menge $-b$, der Elektrode B die sogleich verwendbare Menge $+b$. Durch Drehung des Schildes wird die Menge $-rb$ an die Elektrode A gebracht. Nach einer ganzen Umdrehung des Glasstabes um seine Axe hat man bei A die Menge $-(a+rb)$, bei B die Menge $+(b+ra)$ zur Benutzung. Diese beiden Elektricitätsmengen werden verdoppelt, wenn man an dem Glasstabe, dessen eines Ende den Schild trägt, auch am andern Ende einen Schild anbringt. So entsteht der *drehbare Doppelelektrophor* mit folgendem an sich verständlichen Schema.



Nach jeder Umdrehung des Glasstabs um seine normale Axe bleibt bei A zur Benutzung die negative Elektricitätsmenge $-2(a+rb)$, bei B die positive Menge $+2(b+ra)$. Bei gleichwirkenden Elektrophoren ist $a=b$ und an beiden Elektroden werden bei jeder Witterung gleiche Elektricitätsmengen gewonnen. Aber auch bei ungleich wirkenden Elektrophoren sind die Elektricitätsmengen nahe gleich, wenn der Elektricitätsverlust durch die Luft sehr klein ist, weil dann r wenig von der Einheit abweicht. Bei merklicher Zerstreuung hingegen ist die an der Elektrode des stärker wirkenden Elektrophors gesammelte Elektricitätsmenge gröfser als die andre.[1]) Der Unterschied der Elektricitätsmengen an beiden Elektroden nach jeder Umdrehung des Glasstabes ist $2(b-a)(1-r)$, wo r von dem Zustande der Luft abhängt. Dieser Unterschied verschwindet, wenn entweder $b=a$, beide Elektrophore völlig gleich wirken oder $r=1$ ist, jeder Schild bei seiner Bewegung von einer Elektrode zur andern seine Elektricität ganz behält. Der Fall, wo für $r=0$, der Unterschied constant $=2(b-a)$ wird, kommt nicht vor, weil alsdann der Apparat überhaupt nicht zur Wirkung gelangen kann.

Der Gebrauch des aus dem einfachen Elektrophore entstandenen Doppelelektrophors wird dadurch unbequem, dafs die beiden Papierkuchen nach längerer oder kürzerer Zeit aufs Neue elektrisirt werden müssen. Diesem Mangel wird abgeholfen durch Anwendung eines bekannten Satzes: *Eine an das* (dem influencirenden Körper) *zugewandte Ende eines influencirten Leiters angesetzte Spitze ladet den Leiter mit derselben Elektricität, die der influencirende Körper be-*

1) Dies zeigt sehr auffallend die von Kundt nach dem Principe eines Doppelelektrophors construirte Maschine, an welchem der negative Kuchen schwächer wirkt, als der positive (Poggend. Ann. Bd. 135, S. 484). Die Maschine liefert gewöhnlich mehr positive als negative Elektricität, was ohne Berücksichtigung des Elektricitätsverlustes durch Zerstreuung unerklärlich ist. Bei vernachlässigtem Verluste wird nämlich in der obigen Formel $r=1$ und die Elektricmengen der Elektroden werden einander gleich, wie verschieden auch a und b seyn mögen.

sitzt (Riefs El. Lehre 1. § 247). Zum Belege für diesen Satz war dort eine positiv elektrische Kugel in einiger Entfernung unter einen isolirten vertikalen Metallcylinder gestellt, an dessen unteres Ende eine Nadel angesetzt war. Zwischen Nadel und Kugel lag eine horizontale Glasscheibe. Der Cylinder wurde dauernd positiv elektrisch; die an ihm befestigte Spitze durfte aber nicht zu scharf seyn, weil sonst der Cylinder nach Entfernung der Kugel seine Elektricität wieder verlor.

Es seyen an den beiden Schilden des Doppelelektrophors auf den den Papierkuchen zugewandten Flächen Glasscheiben befestigt von etwas gröfsern Dimensionen, als die Schilde besitzen. An den untern Rand des einen und den obern Rand des andern Papierkuchens werde eine Spitze aus Carton befestigt, und der Glasstab so gedreht, dafs jeder Schild, ehe er seine Elektricität an eine Elektrode abgiebt, einer Cartonspitze vorübergeht. Der Schild von *A*, der positiv elektrisch ist, wird, ohne Elektricität zu verlieren, nach dem angeführten Satze, den Kuchen $+K$ mit positiver, der Schild von *B* den Kuchen $-K$ mit negativer Elektricität versehen, so lange als die Kuchen noch Elektricität aufnehmen können. Wir sind also zu einem Doppelelektrophore gelangt, dessen Kuchen während seines Gebrauchs fortdauernd elektrisirt werden; damit er möglichst ausgiebig sei, mufs man, statt der beiden Schilde, eine thunlichst grofse Anzahl gleicher Schilde gebrauchen, die von sternförmig an der Drehungsaxe befestigten Glasstäben gehalten werden.

Ein Metallkamm in der Nähe eines mit Elektricität versehenen Körpers läfst, wie die Elektrisirmaschine zeigt, die damit ungleichnamige Elektricität leuchtend ausströmen (elektrisirt die Luft, die heftig abgestofsen wird). Diese Erfahrung giebt das Mittel, an dem Doppelelektrophore die grofse Anzahl von Schilden und ihre Rotation zu entbehren. Man gebe jedem der beiden Schilde des Doppelelektrophors die Form eines horizontalen Metallkammes und befestige sie, die Spitzen der Kämme gegen die Papier-

kuchen gerichtet, an beiden Elektroden. Zwischen den Kämmen und Kuchen sey eine Glasscheibe gestellt und werde statt des Glasstabes in Rotation versetzt. Jeder Metallkamm läfst dieselbe Elektricitätsart, die früher der an seiner Stelle stehende Plattenschild erhielt, auf die Glasscheibe strömen, deren beide Hälften demnach bei der Rotation der Scheibe mit entgegengesetzten Elektricitäten bedeckt werden. Diese Elektricitäten werden durch die Scheibe an die Elektroden gebracht wie früher durch die bewegten Plattenschilde. Da ein kleiner Theil einer elektrischen Glasscheibe entladen werden kann, während die übrigen Theile der Scheibe ihre Elektricität behalten, so ersetzt die Scheibe, im Falle dafs sie gut isolirt, die vielen sternförmig gestellten Schilde, und liefert die gröfste Elektricitätsmenge zur Benutzung. Wenn man die Maschine in Gang setzt, wobei die Papierkuchen sehr schwach elektrisch sind, dürfen die Elektroden nicht elektrisch seyn, weil sonst die Influencirung der Metallkämme aufhören würde. Die Elektroden müssen also beim Anfange des Gebrauchs der Maschine zur Erde abgeleitet oder, was denselben Erfolg hat und gewöhnlich bequemer ist, mit einander metallisch verbunden seyn.

Diese Maschine, die ich allmählich habe entstehen lassen und deren Spiel darum keinem Zweifel unterworfen seyn kann, enthält die theoretisch wesentlichen Theile der Holtz'schen Elektrophormaschine und lehrt daher das empirische Spiel dieser Maschine kennen. Dafs hiermit eine gute Holtz'sche Maschine entstanden sey, kann nicht erwartet werden, aber ganz unbrauchbar ist sie nicht. Ich habe sie ausgeführt (Papierkuchen 18 par. Lin. breit, $4\frac{1}{2}$ Zoll lang, Metallkämme etwa gleicher Länge, drehbare Glasscheibe 15 Zoll breit) und damit eine Batterie mit 7,8 Quad. Fufs Belegung ziemlich stark geladen. Aber die Funkenströme zwischen den Elektrodenenden waren höchstens $\frac{1}{2}$ Zoll lang, und die Maschine erlosch schnell, wenn die Scheibe ruhte, oder wechselte ihre Pole, wenn sie wieder in Bewegung gesetzt wurde. Um längere Funken und eine länger dauernde

Ladung der Maschine zu erhalten, mufs man jedem Papierkuchen an seinem der Cartonspitze gegenüber liegenden Rande einen Fortsatz durch einen Glassektor geben, der von Holtz bis nahe an die Cartonspitze des andern Kuchens fortgeführt wurde; hierdurch ist die ruhende Glasscheibe mit 2 Ausschnitten entstanden, die auch zur bequemen Befestigung der Papierkuchen dient. Diese ruhende Scheibe ist in praktischer Hinsicht wichtig, aber theoretisch ist sie unwesentlich, und sie hat Viel dazu beigetragen, die Kenntnifs des Spiels der Maschine zu verzögern. Auch kleinere Glassektoren als Ansätze der Papierkuchen sind schon wirksam. So hat Bernardi eine Maschine ausgeführt, an welcher die beiden Sektoren etwa $\frac{1}{7}$ der Gröfse der rotirenden Scheibe entsprachen und damit Funken von $4\frac{3}{4}$ Zoll Länge erhalten (*Nuovo Cimento s.* 2, *t.* 4, *p.* 337). Zur Verhütung des Polwechsels und schnellen Erlöschens der Maschine hat es sich, soviel mir bekannt ist, am besten bewährt, 3 Papierkuchen anzuwenden, von welchen 2 zusammenhangen, und 3 Metallkämme, von welchen 2 mit einander metallisch verbunden und zur Erde abgeleitet sind (Pogg. Ann. Bd. 140, S. 168).

Bis hierher ist nur von Influenz auf Metall und Papier die Rede gewesen, die Influenz auf die rotirende Glasscheibe nicht erwähnt worden. In meiner Erklärung der Elektrophormaschinen habe ich der Influenzirung der Glasscheibe einen wesentlichen Antheil an dem Spiele der Maschine zugeschrieben. Die Glasscheibe erfährt muthmafslich zwei Influenzen; die eine von den Papierkuchen, die andre von ihrer durch Ausströmung von den Metallkämmen elektrisirten Hinterfläche. Beide Influenzen treten zwar momentan auf, bedürfen aber der Zeit, um das Glas dauernd elektrisch zu machen. Es ist daher unthunlich, der von dem einen Papierkuchen in der ihm zugekehrten Vorderfläche der Glasscheibe erregten Elektricität eine merkliche Wirkung auf den andern Kuchen zuzuschreiben, zu dem sie erst nach einer halben Umdrehung der Scheibe gelangt. Deshalb habe ich nur die Influenz der elektri-

sirten Hinterfläche auf die Vorderfläche der Scheibe zur Erklärung benutzt, wobei die influencirte Elektricität zur Wirkung kommt im Augenblicke, wo die influencirende auf der Hinterfläche noch vorhanden ist. Der erste Bearbeiter meiner Erklärung, Hr. Bertin (*Ann. d. chim.* (4) *t.* 13, *p.* 190—199), hat dagegen die Influenz des Papierkuchens auf die Glasscheibe allein zur Erklärung des Spiels der Maschine gebraucht, und die ihm nachfolgten, haben auch diese Influenz fortgelassen. Ihnen ist die Glasscheibe, elektrisch unthätig, nur das mechanische Hülfsmittel, die von einem Kamme ausgeströmte Elektricität zum andern Kamme, die von einer Cartonspitze ausgeströmte zur andern Spitze hinzuführen. Ist auch, wie oben gezeigt worden, das Spiel einer Elektrophormaschine ohne Berücksichtigung der Influenz auf die Scheibe empirisch deutlich zu machen, so verlangt die wissenschaftliche Erklärung, dafs alle an der Maschine auftretenden Wirkungen in Betracht gezogen werden.

Eine *Doppelinfluenz* nach meiner Bezeichnung tritt ein, wenn ein elektrisirter Körper auf einen mit Spitzen versehenen Leiter wirkt und die Spitzen nahe der einen Fläche einer nichtleitenden Platte stehn. Diese Fläche, zur Kürze der Bezeichnung sey es die obere, wird dann durch elektrische Ausströmung von den Spitzen elektrisch gemacht und wirkt influencirend auf die untere Fläche der Platte in der Art, dafs letzte eine mit der obern Fläche gleichnamig elektrische Schicht erhält und unmittelbar darüber im Innern der Platte sich eine ungleichnamige Schicht befindet. Wie weiter im Innern der nichtleitenden Platte der elektrische Zustand ist, bleibt hier gleichgültig. Diese Art der Influenz habe ich *Influenz einer nichtleitenden Platte auf sich selbst* genannt. Alle Zweifel an der Doppelinfluenz betrafen allein diese Influenz auf sich selbst und können jetzt als beseitigt angesehen werden, da ich an einem andern Orte [1]) gezeigt habe, dafs die Leugnung der

1) Pogg. Ann. Jubelband 375.

Influenz auf sich selbst die Leugnung einer Menge bekannter Thatsachen nach sich ziehen würde.

An allen mit Metallkämmen versehenen Elektrophormaschinen tritt nothwendig die Doppelinfluenz auf. Ich will ihren Einfluſs auf das Spiel dieser Maschine nur bei der einfachsten, der Holtz'schen Maschine mit zwei Kämmen und Kuchen und bei ihrer einfachsten Erregung angeben, da er sich in den übrigen Fällen daraus ohne Schwierigkeit ableiten läſst.

Es werde einem Papierkuchen der Maschine eine negativ elektrische Platte nahe gebracht. Die dem Kuchen gegenüberliegende Elektrode wird durch Influenz der Platte negativ und der daran befestigte Metallkamm läſst positive Elektricität auf die Hinterfläche der drehbaren Glasscheibe strömen. Diese positiv elektrische Hinterfläche influencirt eine Stelle der Vorderfläche der Scheibe, die dadurch negative und positive Elektricität erhält, letzte am entferntesten von der Hinterfläche. Durch Drehung der Scheibe kommt die elektrische Stelle derselben in die Nähe der Cartonspitze des zweiten Kuchens. Von der elektrischen Doppelschicht auf der Vorderfläche des Glases kann nur die positive Elektricität auf die Cartonspitze wirken, weil die Wirkung der negativen Elektricität durch die positive Elektricität der Hinterfläche der Scheibe aufgehoben wird. Die positive Elektricität der Doppelschicht macht durch Influenz den Papierkuchen positiv, dessen Cartonspitze auf die Vorderfläche der Scheibe negative Elektricität strömen läſst, die einen Theil der positiven Elektricität der Doppelschicht vernichtet. Bei weiterer Drehung kommt die betrachtete Stelle der Glasscheibe an den Metallkamm der zweiten Elektrode, der die positive Elektricität der Hinterfläche *einsaugt*, wie man mit kurzem Ausdrucke zu sagen pflegt (Pogg. Ann. Bd. 140, S. 563 Anm.). Damit verschwindet die Doppelschicht der Vorderfläche bis auf den Theil von negativer Elektricität, der durch Vernichtung von positiver Elektricität durch die Cartonspitze übrig geblieben ist. Die an den Metallkamm angesetzte Elek-

trode wird positiv durch die eingesaugte Elektricität und ferner durch Influenz des positiv gewordenen Kuchens. Der Metallkamm läſst dabei negative Elektricität auf die Hinterfläche der Glasscheibe strömen und diese erregt auf der Vorderfläche eine neue Doppelschicht von positiver und negativer Elektricität, aber mit einem Ueberschuſs von negativer Elektricität, da solche von der verschwundenen Doppelschicht zurückgeblieben ist. Indem nun das betrachtete Stück der Glasscheibe an die Cartonspitze des ersten Kuchens gedreht wird, nimmt diese den Ueberschuſs von negativer Elektricität der Vorderfläche auf, macht dadurch den ersten Kuchen negativ und der Metallkamm saugt die negative Elektricität der Hinterfläche ein. Die an den Kamm befestigte Elektrode wird negativ und die Doppelschicht der Vorderfläche verschwindet vollständig, worauf der beschriebene Vorgang sich wiederholt. Der Ueberschuſs an negativer Elektricität auf der Vorderfläche der gedrehten Scheibe nimmt mit steigender Ladung der beiden Papierkuchen schnell ab, weil die Kuchen nur eine bestimmte Ladung und keine höhere annehmen. Alsdann influencirt die Doppelschicht der Scheibe nicht mehr die beiden Papierkuchen, sondern nur ihre freiliegenden Cartonstücke, von welchen jedes Stück an seiner Spitze die eine, an seiner Basis die andre Elektricität in ziemlich gleicher Menge leuchtend auf die rotirende Scheibe sendet, also die Elektricitäten der Vorderfläche der Scheibe nicht merklich ändert (Pogg. Ann. Bd. 140, S. 170).

Um diese etwas umständliche Darstellung des Spiels der Elektrophormaschine für die praktische Anwendung zu verkürzen, kann man, wie ich bisher gethan, von der elektrischen Doppelschicht der Vorderfläche der gedrehten Scheibe nur die Elektricität betrachten, die zur Wirkung auf die Cartonspitze kommt, und diese Wirkung mit der der Kuchen in dem einfachen Satze zusammenfassen:

In Folge der Doppelinfluenz erhält an den Elektrophormaschinen jede Elektrode Elektricität gleichnamig mit der Elektricität des gegenüberstehenden

Kuchens, die dazwischen liegende Glasscheibe auf ihren beiden Flächen die damit ungleichnamige Elektricität.

Die drei gesonderten leicht nachweisbaren Elektricitätsportionen habe ich wie folgt bezeichnet:

Wenn die Elektricität eines jeden der beiden Kuchen $+1$ gesetzt wird,

Elektricität der nächsten Elektrode . . . . $+m$,
" der Hinterfläche der rotirenden Scheibe $-m$,
" der Vorderfläche . . . . $-p$.

m und p sind kleiner als 1. Aus diesen drei Elektricitäten, welche in der von Hrn. Bertin und Andern vorgenommenen Aenderung meiner Erklärung beibehalten worden sind, habe ich durch Combination derselben ein einfaches, übersichtliches Schema gebildet aller zur Beschaffung von Elektricität dienenden Maschinen, die ich mit dem gemeinsamen Namen *Influenzmaschinen* belegt habe (Akadem. Ber. 1867, S. 203. *Annal. d. chim.* (4) 13, S. 199) ein Schema, das mir bei der Beurtheilung einer neuen und mancher angeblich neuen Influenzmaschine gute Dienste geleistet hat.

V. *Kritisches zur Elektrodynamik;* *von H. Helmholtz.*

Auf S. 138 ff. dieses Bandes sind von Hrn. Zoellner, und S. 262 von Hrn. Herwig elektrodynamische Versuche beschrieben worden, welche nach Ansicht ihrer Urheber geeignet seyn sollen, das von Hrn. F. E. Neumann (dem Vater) aufgestellte und von mir in erweiterter Anwendung durchgeführte Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen als unvereinbar mit den experimentellen Erfahrungen darzustellen. Dieses Gesetz, welches wir kurzweg

als das *elektrodynamische Potentialgesetz*, oder so weit es noch nicht durch die Versuche bestätigt ist, als die *Potentialhypothese* bezeichnen wollen, sagt aus, dafs die elektrodynamischen Kräfte ein Potential haben, und dafs dessen Werth derselbe sey, mögen die Kräfte nun als *ponderomotorische* (nach Hrn. C. Neumann's zweckmäfsiger Bezeichnung) die Leiter selbst bewegen, oder als *elektromotorische,* die Elektricität in den Leitern bewegen.

Hr. Neumann senior hatte schon im Jahre 1848[1]) zunächst für den Fall, dafs die Stromleiter linear sind und unveränderliche starre Form besitzen, nachgewiesen, dafs das von ihm aufgestellte Gesetz gerade dieselben ponderomotorischen Kräfte ergebe, wie das von Ampère. Ich habe diesen Beweis neuerdings[2]) ausgedehnt auf beliebig geformte und nach drei Dimensionen ausgedehnte Leiter, deren einzelne Theile beliebige Arten von Dehnsamkeit, Biegsamkeit, elastischer oder flüssiger Nachgiebigkeit besitzen. Vorausgesetzt, dafs wir es nur mit geschlossenen Strömen zu thun haben, ergeben beide, Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz, genau dieselben Werthe der resultirenden Kräfte, welche jeden einzelnen Punkt des bewegten Leiters angreifen, wenn auch die Ansichten über die Componenten, aus denen diese Resultanten sich zusammensetzen, weit auseinander gehen.

Die Abweichung beider Theorien von einander beginnt erst, wenn man es mit ungeschlossenen Strömen zu thun hat, und der Zweck meiner theoretischen Arbeiten war es eben, diejenigen Fälle herauszufinden, wo ein Unterschied beider Gesetze sich bei ausführbaren Versuchen zu erkennen geben würde. Uebrigens haben wir es bei den Versuchen meiner beiden Gegner durchaus nur mit geschlossenen Strömen zu thun, und es müssen also, wenn ich nicht einen Rechenfehler in meinen theoretischen Un-

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer.

2) Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Borchardt's Journal für Mathematik. Bd. 78, S. 273.

tersuchungen begangen habe, die Ergebnisse dieser Versuche entweder mit beiden Gesetzen übereinstimmen oder mit beiden in Widerstreit sein. In Wirklichkeit tritt der erste Fall ein; sie stimmen mit beiden überein, wie ich zeigen werde.

Das *elektrodynamische Potential* p zweier linearen Stromelemente ds und $d\sigma$, welche von den Stromstärken i und j durchflossen werden, deren Richtungen miteinander den Winkel ε bilden, und deren Entfernung gleich r ist, hat nach der Neumann'schen Formulirung bei Festsetzung passender Einheiten der Stromstärke den Werth

$$p = -i \,.\, j \,.\, ds \,.\, d\sigma \,.\, \frac{\cos \varepsilon}{r}.$$

Die mechanische Bedeutung dieses Ausdrucks besteht darin, daſs er die Gröſse des Arbeitsvorraths angiebt, den die ponderomotorischen Kräfte der beiden Elemente bei unveränderten Stromstärken i und j zu leisten im Stande sind, wenn man beide entweder in unendliche Entfernung von einander oder überhaupt in eine Lage überführt, wo $p=0$ ist. Letzteres geschieht zum Beispiel auch, wenn man sie rechtwinklig gegen einander richtet. Die Kräfte, welche die genannten beiden Elemente auf einander ausüben, ergeben sich aus der Bedingung, daſs diese Kräfte, ohne selbst von der Art der Bewegung der Elemente abhängig zu seyn, bei jeder virtuellen Verschiebung der Elemente eine Arbeit leisten müssen, deren Betrag gleich $-dp$ ist.

Betrachten wir, wie oben geschehen, die Elemente ds und $d\sigma$ als linear, d. h. ihren Querschnitt als verschwindend klein gegen ihre Länge, sie selbst aber als geradlinig bleibend, wie es bei den unendlich kleinen Längenelementen einer Curve geschehen darf, so können sich in dem Ausdruck von p ändern die Gröſsen ds, $d\sigma$, ε und r. Die entsprechenden Kräfte sind dem entsprechend:

1) ein Kräftepaar, welches die Enden von ds angreift, dessen Componenten parallel $d\sigma$ gerichtet sind, und die Intensität haben

$$\frac{i \,.\, j \,.\, d\sigma}{r}$$

Dieses Kräftepaar strebt den Strom i in ds parallel und gleichgerichtet zu stellen dem Strome j in $d\sigma$.

2) ein entsprechendes Kräftepaar, welches $d\sigma$ parallel ds zu stellen sucht, dessen Componenten die Endpunkte von $d\sigma$ angreifen, parallel ds gerichtet sind, und die Intensität haben

$$\frac{i \,.\, j \,.\, ds}{r}.$$

Beide Kräftepaare werden die Elemente auch zu dehnen streben, wenn $\cos \varepsilon$ positiv ist.

3) eine Anziehungskraft zwischen beiden Elementen in Richtung der Linie r, deren Gröſse ist

$$i \,.\, j \,.\, ds \,.\, d\sigma \frac{\cos \varepsilon}{r_2}.$$

Das heiſst: wenn die Stromesrichtungen gleichnamiger Elektricität mit einander einen spitzen Winkel bilden, ziehen sich die beiden Ströme an; bilden sie einen stumpfen Winkel, so stoſsen sie sich ab.

Das Drehungsmoment jener beiden Kräftepaare hat den Werth:

$$i \,.\, j \,.\, ds \,;\, d\sigma \frac{\sin \varepsilon}{r}$$

Aus der Vergleichung dieses Werthes mit dem für die Anziehungskraft geht hervor, daſs wie bei den Einwirkungen, welche eine kleine Magnetnadel von entfernten Magneten erleidet, in gröſseren Entfernungen die drehenden Kräfte einen überwiegenden Einfluſs den anziehenden gegenüber haben werden.

Will man ermitteln, ob die elektrodynamischen Kräfte eine gewisse Lagenänderung eines der Leiter oder seiner Theile unterstützen können, so hat man nur nachzusehen, ob durch die betreffende Lagenänderung der Werth des Potentials der beiden Stromleitungen auf einander kleiner werde. Ist das der Fall, so unterstützen die elektrodynamischen Kräfte die Bewegung, oder streben sie hervorzubringen, wenn sie noch nicht besteht.

Natürlich mufs aber eine solche Untersuchung sich auf *alle* bewegten Theile des Leiters erstrecken, und man mufs nicht willkürlich einige berücksichtigen und andere aufser Betracht lassen.

Bei der gewöhnlichen Art die Rotation eines Leiters um einen vertical aufgestellten Magneten zu zeigen, läfst man einen starren Bügel um eine mit der Axe des Magneten zusammenfallende verticale Axe rotiren. Die Theile des Leiters können dabei keine andere Bewegung machen, als die Rotationsbewegung; folglich ist bei der Anwendung des Potentialgesetzes auf diesen besonderen Fall, auch auf keine andere mögliche Bewegung des starren Leiters Rücksicht zu nehmen. Herr Riecke[1]) hatte richtig hervorgehoben, dafs in diesem Falle das elektrodynamische Potential auf die verschiedenen Theile des rotirenden Bügels keine Aenderung erleidet, und da dennoch Rotation desselben eintritt, geglaubt daraus einen Einwand gegen das Potentialgesetz hernehmen zu können. Ich selbst hatte dagegen darauf aufmerksam gemacht, dafs rotirende Kräfte auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden des Quecksilbers oder der Elektrolyten einwirken, durch welche man dem peripherischen Ende des Bügels den Strom zuleiten mufs. Dadurch werden die dem Leiter adhärirenden Theile dieser Flüssigkeitsfäden im Sinne der wirklich stattfindenden Rotation fortbewegt, und nehmen den festen Leiter mit.

Dies hindert nun natürlich nicht, dafs wenn man irgend welche Theile des Bügels beweglich macht, diese ihrerseits durch die elektrodynamischen Kräfte, denen sie ausgesetzt sind, entsprechend gerichtet werden. Dies hat zum Beispiel Hr. Zoellner betreffs der seitlichen verticalen Theile des Bügels gethan, indem er sie aus Ketten oder dünnen frei herabhängenden Kupferdrähten bestehen liefs. Da nun bekanntlich ein Magnet einen seiner Längsaxe parallel neben ihm herlaufenden Stromleiter nach dem Ampère'schen, wie nach dem Potential-

1) Göttinger Nachrichten 14 August 1872.

gesetze quer gegen seine Längsaxe, das heifst parallel den dem Drahte zugewendeten Seiten seiner Kreisströme, zu stellen sucht, so geschieht dies auch in diesem Falle so, wie es der genannte Autor beobachtet hat. Da es die gleiche drehende Kraft ist, welche auf den beweglichen Draht und auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden wirkt, in die sich sein unteres Ende verlängert, so werden beide auch in gleichem Sinne gedreht, nur dafs die Drehung des Drahtes ihre Gränzen findet an seiner Festigkeit und Schwere, die Drehung in der Flüssigkeit aber ohne Gränze vorwärts gehen kann. Darum geht das obere Ende des beweglichen Drahtes bei der Rotation voraus, oder neigt sich wenigstens im Sinne derselben vorwärts, wenn die Flüssigkeit zu zäh ist, um die Rotation zu gestatten.

Diese so einfache und bei folgerichtiger Anwendung des Princips sich nothwendig ergebende Erklärung der Zöllner'schen Versuche hat auch Hr. C. Neumann (Sohn) übersehen, indem er (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. 8. Aug. 1874, S. 145) die Erwartung ausspricht, dafs diesen Versuchen gegenüber die Potentialtheorie nicht mehr zu halten seyn würde.

Ich wende mich nun zu den von Hrn. Herwig beschriebenen Versuchen. Derselbe hat das Quecksilber beseitigt und dafür sehr biegsame Drähte angewendet. Der feste Bügel ist aufgehängt an einem oberen verticalen Draht, der bei der Drehung torquirt wird, und dessen elektromagnetische Wirkung nicht in Betracht kommt, wie besonders zu diesem Zwecke angestellte Versuche gezeigt haben. Letzteres stimmt übrigens mit den Folgerungen aus der Theorie überein, wenn man die Dicke des Drahtes als verschwindend klein betrachtet. Der zweite Draht (*def* in der Figur S. 265 dieses Bandes), der den Strom zum unteren Ende des Bügels leitet, beschreibt einen horizontalen Halbkreis, dessen Mittelpunkt in der gemeinsamen Axe des Elektromagneten und der Rotation liegt. Dieser Draht mufs von den Kreisströmen des Elektromagneten

angezogen und abgestofsen werden, je nachdem in beiden die Ströme gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Im ersteren Falle wird er gegen *d* drücken, im zweiten Falle daran ziehen, und da der Bügel so aufgehängt ist, dafs er nur im Sinne der Rotation merkliche Verschiebungen machen kann, wird er Drehbewegungen beginnen und so weit fortsetzen, bis die Elasticität der gebogenen Drähte *def* und *dgf* den elektromagnetischen Kräften das Gleichgewicht hält. Drehung in dem genannten Sinne ist es, die wirklich eintritt.

Alles dies ist in Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetz. Auch dafs Hr. Herwig bei Verschiebungen des Magneten durch Berechnung nach Ampère's Formel annähernd richtige Verhältnisse für die Gröfse der Drehkräfte erhielt, ist kein Widerspruch gegen das Potentialgesetz, da die *resultirenden Kräfte* nach beiden Gesetzen immer die gleichen seyn müssen. Ebenso hat der genannte Experimentator aus dem Potentialgesetze richtig geschlossen, dafs die Drehkraft gleich grofs seyn müsse, wenn er den Draht *def* durch Heben und Senken des Magneten in symmetrische Lage zu beiden Polen brachte. Der Versuch bestätigte dies. Ich erlaube mir dabei zu bemerken, dafs dies eines der Beispiele ist, welche zeigen, wie übersichtlich die Erscheinungen durch das Potentialgesetz werden. Um diese Folgerung bei der sehr asymmetrischen Beschaffenheit des Bügels direct aus dem Ampère'schen Gesetze zu ziehen, wären wohl ziemlich weitläuftige Rechnungen nöthig gewesen. Sich ableiten lassen mufs sie schliefslich aus dem letzteren auch.

Was nun die Punkte betrifft, an denen Hr. Herwig Anstofs nimmt, so hat er erstens einen Versuch beschrieben, bei dessen Deutung ein ähnliches Uebersehen vorkommt, wie das oben besprochene. Er hat nämlich, um die nach Ampère direct auf den Bügel wirkenden Kräfte zu beseitigen, eine zweite Ableitung am unteren Ende des Bügels durch einen feinen in radialer Richtung geführten Draht (*ch* der Figur auf S. 265) angebracht. Geht nun

der Strom durch *def* und *ch*, so bleibt die Wirkung des Magneten auf *def* unverändert, die auf den Bügel *ca*, falls eine solche vorhanden ist, fällt weg. Der Versuch ergab ihm nun in der That, dafs die Rotationskraft auf einen kleinen Bruchtheil ihrer früheren Gröfse vermindert wurde, und Hr. Herwig schliefst daraus, dafs die Wirkung auf den Draht *def* unerheblich sey, die hauptsächlichste Drehkraft dagegen auf den Bügel *abc* ausgeübt werde.

Unser Autor hat dabei übersehen, dafs er durch Einführung des beweglichen Drahtes *ch* eine Gegenkraft einführte, die vorher nicht bestand. Das Potential des Drahtes *ch* ist Null, so lange er streng radiale Richtung hat. Es wird dagegen von Null verschieden, so wie der Punkt *e* der Drehung des Bügels folgt, während das entferntere Ende des Drahtes festgehalten wird; und zwar ist der Sinn dieser Wendung des Drahtes *ch* der Richtung entgegengesetzt, in welche die elektromagnetischen Kräfte ihn zu drehen streben. Hr. Herwig scheint die Wirkung dieses Drahtes für unbedeutend gehalten zu haben, da er sich auf kürzestem Wege vom Elektromagneten entfernt, und sehr dünn war. Eine leicht auszuführende Rechnung ergiebt dagegen, dafs, wenn die Länge des Magneten sehr beträchtlich wäre im Vergleich mit der Länge dieser Drähte von *f* bis *h*, die elektromagnetischen Kräfte, die auf *def* und *ch* nach dem Potentialgesetze ausgeübt werden, sich gegenseitig vollständig im Gleichgewicht halten würden.

Rings um die Mitte eines sehr langen gleichmäfsig magnetisirten cylindrischen Magneten ist nämlich das elektromagnetische Potential eines Stromelements $i \, . \, ds$ von der Form

$$M \, . \, i \, . \, \frac{ds \, . \, \cos \eta}{\varrho},$$

wo M eine von der Stärke der Magnetisirung abhängige Constante bedeutet, η den Winkel, den die Richtung von i in ds mit der Tangente eines durch ds gehenden Kreises vom Radius ϱ bildet, dessen Mittelpunkt in der Axe

des Magneten liegt und dessen Ebene senkrecht zu dieser Axe ist. Denken wir uns durch die Axe des Magneten als Pollinie eine feste Meridianebene gelegt, und nennen ω den Winkel, welchen die Linie ϱ mit dieser festen Meridianebene bildet, so ist $\varrho \, . \, d\omega = ds \, . \cos \eta$. Somit wird der obige Ausdruck gleich

$$Mi \, . \, d\omega$$

und der ganze Werth des Potentials des Drahtes

$$Mi \, (\omega_1 - \omega_0),$$

wo ω_1 und ω_0 die Werthe des Winkels ω für Anfang und Ende der übrigens ganz beliebig zu führenden Drahtcurve bezeichnen. Sind also diese Endpunkte fest, wie in Hrn. Herwig's Versuch die Punkte f und h, so kann keinerlei Lagenänderung der dazwischen befindlichen Drahtleitung das Potential verändern, und also keine elektrodynamische Wirkung auf den Draht vorhanden seyn. Dafs Hr. Herwig doch noch einen kleinen Rest einer solchen gesehen hat, wird darauf zurückzuführen seyn, dafs die Länge seines Magneten verglichen mit den Längen der Drähte endlich war, und dadurch die nahen Theile des Drahtes in ein etwas günstigeres Verhältnifs zum Magneten kamen, als die entfernten.

Aufserdem aber spricht Hr. Herwig die Meinung aus, dafs so dünne Drähte, wie er sie zur Ueberleitung des Stroms auf den Bügel angewendet hat, keine für die Bewegung des schwer belasteten Bügels in Betracht kommende Wirkung auf diesen zu übertragen im Stande seyen. Eines ist ohne weitere Ueberlegung einzusehen, dafs wenn der Draht *def* vom Magneten abgestofsen wurde, er, weil er sehr dünn und vollkommen biegsam war, durch die Abstofsung gespannt werden und dann den drehbaren Bügel nach sich ziehen mufste, wie er auch wirklich that.

Zweifelhafter könnte die Sache aussehen, wenn der Draht angezogen wurde, wo er sich ohne erheblichen Widerstand in irgend eine Curve zusammenbiegen konnte. Wir dürfen aber wohl annehmen, dafs er immer noch steif genug war, um durch die Anziehung des Magneten nicht

bis zur Berührung an diesen herangezogen zu werden. Wäre letzteres eingetreten, würde es Hr. Herwig wohl erwähnt haben. Ueber einen solchen Fall nun giebt das Princip von den virtuellen Geschwindigkeiten ganz bestimmte Auskunft. Dieses sagt bekanntlich aus, daſs, wenn ein System von Massenpunkten unter der gleichzeitigen Einwirkung von inneren und äuſseren Kräften im Gleichgewicht ist, die äuſseren Kräfte sich für sich im Gleichgewicht halten müssen, wenn man sich das System in seiner Gleichgewichtstellung erstarrt denkt. Das System ist hier der Draht, die inneren Kräfte sind diejenigen seiner Elasticität, die äuſseren sind die elektrodynamischen Kräfte und diejenigen, welche an den Befestigungspunkten auf seine beiden Enden ausgeübt werden. Da möglichst groſse Beweglichkeit des Drahtes dem Zweck des Versuches am besten entspricht, nehme ich an, der Draht sey um seine beiden Endpunkte vollkommen frei drehbar gewesen. Alsdann wird jedes der Enden längs der Horizontalebene nur von einer Kraft, nicht von einem Kräftepaar afficirt werden können. Da die Resultante der elektrodynamischen Kräfte in diesem Falle eine solche ist, die die Mitte des Bogens *def* zur Axe hintreibt, so wird an jedem Ende des Bogens eine halb so groſse Kraftcomponente in paralleler, aber entgegengesetzter Richtung angreifen müssen. Ist der Bogen ein Halbkreis, wie in den vorliegenden Versuchen, so ist diese Richtung die der Tangente an den Enden des Halbkreises, und es folgt daraus, daſs der Draht seinerseits auf den drehbaren Bügel eine Kraft in Richtung der Rotation ausübt, welche dem halben Betrage sämmtlicher auf den Bogen *def* in Richtung dieser Tangente ausgeübten Kraftcomponenten gleich ist; und zwar ist der Bogen dabei in derjenigen Lage zu nehmen, die er unter der Anziehung des Magneten angenommen hat.

Da Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz für alle ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme

gleiche Consequenzen ergeben, so könnte es gleichgiltig erscheinen, welches von beiden man acceptiren will, wenigstens so lange über die Frage, welches von ihnen bei ungeschlossenen Strömen gelte, noch nicht durch Versuche entschieden ist. Ich hoffe übrigens bald im Stande zu seyn, Versuche dieser Art zu vollenden. Inzwischen spricht für das Potentialgesetz nur die gröfsere Einfachheit und das gröfsere Gebiet seiner Geltung. Das Potentialgesetz braucht einen und denselben, verhältnifsmäfsig einfachen mathematischen Ausdruck, um das ganze bisher experimentell gekannte Gebiet der Elektrodynamik, ponderomotorische und elektromotorische Wirkungen, zu umfassen, und im Gebiete der ponderomotorischen Wirkungen bringt es dieselbe grofse Vereinfachung und Uebersichtlichkeit hervor, welche die Einführung des Potentialbegriffs in die Lehre von der Elektrostatik und vom Magnetismus gebracht hat. Ich selbst kann dafür Zeugnifs ablegen, da ich seit nunmehr dreifsig Jahren nie ein anderes Grundprincip als das Potentialgesetz angewendet und nie eines andern bedurft habe, um mich in ziemlich labyrinthischen Aufgaben der Elektrodynamik und zuweilen doch auch auf vorher unbetretenem Boden zurecht zu finden.

Und selbst, wenn man das wohlbekannte Gebiet der Wirkungen geschlossener Ströme verläfst, und die Consequenzen des Gesetzes auf die Wirkungen der ungeschlossenen Ströme ausdehnt, trifft man auf Ergebnisse, die den bekannten Thatsachen sich anschliefsen, und keinen allgemeinen Naturgesetzen widersprechen. Namentlich lassen sich ohne Hülfshypothesen verhältnifsmäfsig einfache Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität in Leitern ableiten, von denen das zuletzt gesagte gilt.

Dagegen braucht Hr. C. Neumann ein besonderes, nämlich Ampère's Gesetz für die ponderomotorischen Wirkungen, ein zweites für die Induction durch Bewegung, ein drittes davon verschiedenes für die Induction durch Aenderung der Stromstärke; und versucht man Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität aus

diesen Gesetzen zu ziehen, so ergeben sie, wie Hrn. W. Weber's Hypothese, labiles Gleichgewicht der Elektricität in Leitern, das heifst sie treten in Widerspruch mit der aller bekanntesten Thatsache, dafs die Elektricität in Leitern ruhen kann, wenn keine bewegenden Kräfte auf sie wirken. Günstigsten Falls (das giebt auch Hr. C. Neumann in seiner letzten, oben citirten Veröffentlichung der Hauptsache nach zu) wird durch Einführung von Molecularkräften (welche die Gleichungen viel verwickelter machen würden) die Stabilität des Gleichgewichts sich retten lassen für Leiter von mäfsigen Dimensionen, nicht für beliebig grofse. Das sind die Gründe, warum mir das Potentialgesetz eine überwiegend grofse Wahrscheinlichkeit für sich zu haben scheint, und ich es nach dem bisherigen Stande unserer Kenntnisse für den sichersten Führer im Gebiete der Elektrodynamik, seine Entdeckung aber durch Hrn. F. E. Neumann, den Vater, stets für einen der glücklichsten und fruchtbarsten Gedanken gehalten habe, welchen die neuere mathematische Physik aufzuweisen hat.

VI. *Ueber die Stromleitung durch Schwefelmetalle; von Ferdinand Braun.*

Im 9. Hefte dieser Annalen (Bd. 153) befindet sich eine Arbeit von Herwig: „Einige Beobachtungen über das Verhalten von Eisen- und Stahlstäben im galvanischen Strome", wonach diese Körper je nach Richtung, Intensität und Dauer des Stromes demselben verschiedenen Widerstand entgegensetzen. Die Aenderungen schwanken im Allgemeinen zwischen $\frac{1}{3000}$ und $\frac{1}{20000}$ des ganzen Werthes. Diese Arbeit veranlafst mich, einiges über ähnliche Erfahrungen mitzutheilen, welche ich bei anderen Körpern

gemacht habe, welche ich aber noch nicht soweit verfolgen konnte, dafs ich den wahren Grund derselben einfach und präcis auszusprechen im Stande wäre. Ich betrachte daher selbstverständlich die folgende Publication als eine einfache Wiedergabe von Beobachtungen, welche wahrscheinlich noch unter sehr complicirten Bedingungen gewonnen sind, indem ich die genauere experimentelle Analyse mir vorbehalte.

Bei einer grofsen Anzahl natürlicher und künstlicher Schwefelmetalle und sehr verschiedenen Stücken, sowohl Krystallen von so vollkommener Ausbildung, wie ich überhaupt bekommen konnte, als derben Stücken habe ich gefunden, dafs der Widerstand derselben verschieden war mit Richtung, Intensität und Dauer des Stromes. Die Unterschiede betragen bis zu 30 pCt. des ganzen Werthes.

Der Strom von gewöhnlich einem grofsen Bunsen'schen Elemente durchflofs einen zickzackförmigen, 0,6^{mm} dicken Neusilberdraht (von 3,7 S. E. Widerstand), welcher durch sieben auf demselben vertheilte Quecksilbernäpfchen von Kork hindurchgezogen war. Von diesen Quecksilbernäpfchen wurde Zweigstrom abgenommen, welcher das Schwefelmetall und die strommessende Vorrichtung (eine stark dämpfende Wiedemann'sche Bussole mit meist 0,22 S. E. Widerstand) durchflofs. — Die Schwierigkeit dieser Versuche liegt zunächst in zuverlässigen Contacten. Ich habe benutzt Quecksilbercontact, stark gegen geprefste Kupfer-, Platin- und Silberdrähte und endlich bei einem Stück eine bereits vorhandene Fassung mit dicken Neusilberbügeln, welche durch Schrauben gedrückt waren. Diese letztere Art der Fassung hat Hittorf[1]) als die beste gefunden.

Ich mufs erwähnen, dafs ich keine thermoelektrische Erregung oder Polarisation gefunden habe, welche auch nur entfernt im Stande wäre, die Erscheinungen zu erklären. Ich prüfte dies dadurch, dafs ich eine Wippe rasch umschlug, welche den ersten Strom unterbrach und nur

1) Hittorf. Pogg. Ann. Bd. 84, S. 81.

noch 2 bis 3^{mm} Weg mit ziemlich großer Geschwindigkeit zurückzulegen hatte, um das Schwefelmetall in den Kreis eines zweiten Multiplicators von passender Empfindlichkeit (Widerstand) einzuschalten.

Bei einer Reihe von natürlichen Schwefelmetallen: Kupferkies, Schwefelkies, Bleiglanz, Fahlerz, bekam ich im Allgemeinen die Erscheinung, daſs die Stromintensität verschieden war, je nach der Stromrichtung, daſs diese Differenz zunahm mit zunehmender Stromintensität und daſs bei Geschlossenhalten des Stromes die Intensität für diejenige Richtung, welche kleineren Widerstand ergab, zunahm, für die entgegengesetzte abnahm. Dabei war stets dafür gesorgt, daſs die Contacte möglichst fest anlagen und waren deshalb mit dem zu untersuchenden Stücke an einem gemeinschaftlichen Brett angebracht. Die Vorrichtungen, welche umgeschaltet werden muſsten, befanden sich auf einem anderen Tische.

Ich verzichte darauf hier mehrere Reihen anzuführen und wähle nur Beispiels halber eine, welche an einem prismatischen Stücke von gegossenem Kupferkies gewonnen wurde. Dasselbe war in Neusilber gefasst und hatte bei ca. 70^{mm} Länge, 20^{mm} Breite nur 15^{mm} Dicke fast 2 S. E. Widerstand. Bei steigender und sinkender Stromintensität (durch veränderte elektromotorische Kraft) wurde es mit metallischem Widerstand verglichen.

Tabelle I.

Elektr. Kraft.	Stromintensität Kupferkies.	Met. Widerstand.
—	15,8	17,0
—	64,2	63,8
—	75,3*)	75,3*)
—	110,7	114,0
—	117 sinkt rasch	126,5
—	119 „ „	178
1 Bunsen	159 „ „	230

*) Der met. Widerstand wurde so gewählt, daſs diese beiden Stromintensitäten gleich waren.

Die Verschiedenheit der Stromintensität, je nach der Richtung des Stromes habe ich in vielen Versuchen, sowohl mit starken als schwachen elektromotorischen Kräften, mit ersten Ausschlägen als mit constanten Ablenkungen beobachtet und bei sicherer Fassung stets mit demselben qualitativen Resultat: daſs bei kleiner Stromintensität die eine Richtung gröſseren Widerstand bietet, bei wachsender Intensität beide Richtungen sich gleich verhalten und daſs sie dann ihre Rolle vertauschen.

Tabelle II.

Elektr. Kraft.	Stromrichtung I.		Stromrichtung II.	
	Erster Ausschlag.	Constante Ablenkung.	Erster Ausschlag.	Constante Ablenkung.
—	10,0	7,8	9,0	5,7
—	43,0	32,0	47	38,2
—	61	45 fällt bis 39	63	45 steigt bis 49
—	89	59	105	85
—	{155	115 - - 106	204	163 - - 167
	—	106	—	166
1 Bunsen	—	120	—	230

Es wird die nächste Aufgabe seyn, womöglich einfachere Versuchsbedingungen herzustellen. Aber es erscheint nicht thunlich, und dies hebe ich hervor, die Erscheinungen durch Fehlerquellen zu erklären, welche bei unserem augenblicklichen experimentellen Standpunkt klar erkannt sind. Mangelhafter Contact ist nicht ausreichend zur Erklärung, denn es ist nicht anzunehmen, daſs bei den rasch auf einander folgenden Messungen sich der Contact sollte stets in derselben Periode wie die Stromumkehrung verbessert und verschlechtert haben. In der That, stellt man absichtlich unsichere Contacte her, wie ich dies erreichte, indem ich eine groſse Anzahl von Kupfer- und Zinkblechen in eine Glasröhre zwischen zwei dicke Drähte presste, so erhielt ich bei Stromwechsel gleichfalls Verschiedenheiten, welche aber willkürlich wechselten oder auch so gingen, daſs wenn die Stromintensität eben sank, sie bei plötzlich gewendetem Strom noch mehr fiel.

Nach längerem Liegen (mehrere Monate) zeigte diese Röhre vollständig normales Verhalten, selbst als ich wenig oder viel destillirtes Wasser zwischen die Bleche gab. Ebenso, wenn ich Drähte ganz willkührlich an die verschiedensten metallisch leitenden Gegenstände anlehnen liefs, zeigte sich stets normales Verhalten. Will man die Beobachtungen erklären durch eine Eigenthümlichkeit der Contacte (Uebergangswiderstand), so fehlen uns bis jetzt Untersuchungen hierüber. Allerdings würde ich es nicht für absolut unmöglich halten, dafs sehr dünne Gasschichten die Anomalie bedingen und bei gewöhnlicher Temperatur diese Schichten schon die Verhältnisse der unipolaren Elektricitätsleitung zeigen, welche bei höheren Temperaturen sich in so auffälligem Maafse leicht zeigen lassen. — Durch thermoelektrische Erregung sind die Erscheinungen direct sicher nicht bedingt. Denn einmal müfsten dazu thermoelektrische Kräfte von $\frac{1}{3}$ Bunsen und darüber angenommen werden und aufserdem ist nach der Theorie und der Summe sämmtlicher Erfahrungen die thermoelektrische Kraft proportional der ersten Potenz der Stromintensität, so dafs ein Thermoelement bei geänderter Stromrichtung keine Verschiedenheit des Widerstandes zeigt, vorausgesetzt, dafs nicht erhebliche dauernde Erregungen zurückgeblieben sind. In der That war der scheinbare Widerstand einer 64 gliederigen Thermosäule unabhängig von der Stromrichtung; andererseits gab eine Wippe, welche das Schwefelmetall direct nach dem Umschlagen mit einem Multiplicator verband, wie schon erwähnt, keinen irgend in Betracht kommenden Ausschlag. Endlich fiel beim Oeffnen des Hauptstroms, wobei nun noch der Nebenstrom mit dem Schwefelmetall und dem Multiplicator geschlossen war, der Spiegel bis genau zu demselben Scalentheil, bis zu welchem er im ersten, über die Ruhelage gehenden Ausschlag sank, wenn statt des Kieses ein ihm aequivalenter metallischer Widerstand eingeschaltet war.

Einen Zusammenhang der Richtungen, in welchen ver-

schiedene Leitungsfähigkeit bezw. eine Maximaldifferenz derselben stattfindet, mit den krystallographischen Eigenschaften der Schwefelmetalle habe ich bis jetzt nicht erkennen können, obschon sich häufig Andeutungen zu finden schienen. Ich will nur einen Versuch noch erwähnen, weniger weil ich glaube, derselbe gebe Aufschlufs hierüber, als weil er zeigt, dafs Fehler, wenigstens im äufseren Contact, nicht die Erscheinungen verursachen können. Unter den Krystallen, welche ich untersuchte, fand ich ein Stück glänzendes Fahlerz von ungemein grofsem Widerstande. Die Tetraeder derselben lagen ziemlich frei und besafsen grofse Flächen. Der Strom von 8 Grove'schen Elementen wurde durch den Krystall geleitet und an einer Wiedemann'schen Bussole gemessen, deren Windungen von zusammen 6000 S. E. Widerstand dem Spiegel möglichst genähert waren. Zwei 2^{mm} dicke, an den Enden sorgfältig abgerundete und geglättete Silberdrähte, welche möglichst fest an den Krystall geprefst waren, leiteten den Strom ein und aus. Stand der eine Draht senkrecht auf der horizontal gelegten Tetraederfläche nahe der Spitze, der andere nahe der Grundlinie derselben Fläche, so gab die Bussole unabhängig von der Stromrichtung 27^{sc} Ablenkung. Wurde nun der letztere Draht gegen die Basis des Tetraeders gestemmt, so trat sofort das anomale Verhalten ein. In der einen Richtung gaben die 8 Elemente 17^{sc} Ablenkung, welche allmälig auf 14^{sc} fiel, in der anderen 27^{sc}, welche rasch bis 35 und von da ab langsam auf 40^{sc} stieg. Bei so immensen Widerständen, welche auch blieben, als die Anlegestellen für die Drähte frisch blank geschabt waren, kann einem mangelhaften Contact die Erscheinung nicht mehr zugeschrieben werden. — Andere Fahlerze (z. B. ein Quecksilberfahlerz mit matter Oberfläche) besafsen Leitungsfähigkeiten, welche mindestens mehrere Millionen mal besser sind.

Es wäre möglich, dafs sich die erwähnten Erscheinungen in folgender Weise erklären. Denkt man sich kleine Krystalle, beispielsweise Tetraeder, eingebettet in eine

Grundmasse von anderer Beschaffenheit und seien dieselhen so orientirt, daſs im Ganzen nach der einen Seite mehr Spizen liegen als Grundflächen, so wird bei Stromdurchgang Folgendes eintreten: Tritt der Strom aus der Grundmasse ein in die Basen der Tetraeder, so findet an der Basis Abkühlung, an der Spitze Erwärmung statt. Die verschwundenen und die erzeugten Wärmemengen sind einander gleich, vertheilen sich aber auf verschiedene Massen; die Grundfläche wird sich stärker zusammenziehen, als jede der drei anderen Flächen sich ausdehnt. Das Tetraeder bleibt sich nicht mehr ähnlich und weicht vor Allem ab von der Form, welche es bei umgekehrter Stromrichtung annimmt. Bei der ersteren Richtung würde die Spitze schärfer, bei der zweiten flacher werden. Es ist somit denkbar, daſs bei der einen Richtung die Contacte verbessert, d. h. die Anzahl der Berührungspunkte mit der umgebenden Grundmasse vermehrt, bei der anderen Stromrichtung vermindert werden. Diese Aenderung kann im groſsen Ganzen proportional der entstehenden Wärmeausdehnung, d. h. proportional der ersten Potenz der Intensität gesetzt werden.

Ferner werden die Grundmasse und die eingebetteten Krystalle durch den Strom erwärmt; findet dies in den beiden Medien in verschiedener Weise statt, so verschieben sich die einzelnen Theile gegen einander und es findet wieder eine Contactänderung statt, welche dem Quadrate der Stromintensität proportional gesetzt werden kann. Faſst man alles zusammen, so kann der ganze Widerstand gesetzt werden gleich einer Function von der Form

$$w + c \cdot J + k \cdot J^2$$

wo w den wahren Widerstand, c und k Constanten, J die Stromintensität bedeutet. Diese Function kann offenbar bei verschiedenem Vorzeichen von c und k kleiner als w, gleich w und gröſser als w werden (vergl. Tab. II).

Ist diese Erklärung richtig, d. h. rühren die Unterschiede her von Contactänderungen, so müssen sich die-

selben auch bei längerem Stromdurchgang (wenigstens innerhalb gewisser Grenzen) in derselben Weise zeigen, d. h. für diejenige Stromrichtung, welche gröfseren Widerstand besitzt, mufs der Widerstand steigen, für die entgegengesetzte fallen — vollständig in Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Dafs bei gröfseren Stromintensitäten im Inneren mancher der spröden Schwefelmetalle, z. B. Bleiglanz, Contactänderungen auftreten, ist aufser Zweifel, da sich die Stromintensität dann bisweilen sprungweise ändert. Doch lassen sich solche Mineralien ausschliefsen. Aber auch in festeren, nicht vollständig homogenen Massen halte ich solche Aenderungen wohl für möglich. Ueberraschend erscheint mir nur, dafs auch bei kleinen Intensitäten und ersten Ausschlägen die Anomalien eintreten. Jedenfalls deutet diese Ueberlegung auf die Möglichkeit von Fehlerquellen, welche vorher vollständig eliminirt werden müssen, ehe man sich der interessanteren Auffassung hingeben darf, welche sofort beim Anblick der Erscheinungen entsteht, dafs man es mit einer Art Richtung der leitenden Molecüle und einer gewissen elektrischen Nachwirkung zu thun hat.

Leipzig, den 23. November 1874.

VII. *Ueber die Reflexion des Lichts an der Vorder- und Hinterfläche einer Linse; von Dr. Krebs,*

Lehrer an d. höh. Gewerbeschule zu Frankfurt a. M.

Wenn Licht auf einen durchsichtigen Körper z. B. auf eine Linse fällt, so wird (abgesehen von der Absorption im Innern des Körpers) ein Theil des Lichtes an der Vorderfläche reflectirt, ein anderer Theil geht durch den

Körper bis an die hintere Fläche, um dort reflectirt zu werden, und ein dritter Theil geht durch den Körper hindurch in das Medium, welches sich hinter dem Körper befindet.

Dieser Fundamentalsatz läfst sich durch einen einfachen Versuch in sehr instructiver Weise illustriren.

Läfst man durch die 3 bis 4 Zoll weite Röhre im Laden eines dunkelen Zimmers ein wagerechtes Strahlenrohr einfallen, und hält man senkrecht in die Strahlen eine Linse, so bemerkt man nicht blos jenseits der Hinterfläche der Linse einen Punkt, in welchem die Lichtstrahlen zusammengehen, sondern noch einen anderen, viel näher an der Linse und vor ihrer Vorderfläche befindlichen; dieser Punkt wird besonders deutlich sichtbar, wenn man in die Strahlen hineinraucht.

Zugleich sieht man, wenn die Linse nicht zu nahe am Laden sich befindet, auf demselben einen hellen Kreis, welcher von einem halbhellen, durch einen farbigen Saum begrenzten Ring, umgeben ist. Besser nimmt man diese Erscheinung wahr, wenn man einen Bogen Zeichenpapier, nachdem man aus der Mitte desselben einen Kreis ausgeschnitten hat, dessen Durchmesser um wenig gröfser ist, als der der Röhre am Laden, mittelst Centrumsstifte am Laden befestigt.

Diese beiden Lichtringe sind mit dem Kreisumfang der Röhre concentrisch, wenn man die Linse genau senkrecht in die wagrecht einfallenden Strahlen hält.

Der äufsere halbhelle Ring mufs jedenfalls, da er farbig gesäumt ist, durch die Reflexion an der Hinterfläche und der ganzhelle durch die Reflexion an der Vorderfläche der Linse entstanden seyn; der erstere verschwindet und es bleibt nur der letztere übrig, wenn man an den vor der Vorderfläche der Linse befindlichen Vereinigungspunkt der Strahlen einen dunkelen Körper, z. B. den Finger bringt und dadurch die sich hier vereinigenden Strahlen verhindert auf den Laden zu fallen. Rückt man mit der Linse näher an den Laden, so nimmt der äufsere

halbhelle Ring rascher an Gröfse ab, als der ganzhelle und es tritt schliefslich ein Punkt ein, wo der halbhelle Ring von dem ganzhellen vollständig verdeckt wird.

Es ist nun nicht uninteressant, die hier bestehenden Verhältnisse mathematisch festzustellen.

Es falle ein Lichtstrahl ab (Fig. 4, Taf. IV) parallel mit der Axe MM' auf die Vorderfläche der Linse LL'. Seien M und M' die Krümmungsmittelpunkte der auf beiden Seiten als gleich gewölbt angenommenen Linse und α der Winkel, welchen der Strahl ab mit dem Einfallsloth $M'b$ bildet, so wird ein Theil des einfallenden Lichtes unter dem gleichen Winkel α in der Richtung br reflectirt; ein anderer Theil wird nach dem Einfallsloth $M'b$ in der Richtung bb' hingebrochen; der Winkel, den $b'b$ mit dem Einfallsloth $M'b$ bildet, mag β heifsen.

Das in der Richtung bb' durch die Linse gehende Licht tritt theilweise in die Luft über und trifft die Axe im Hauptbrennpunkt F, wobei bekanntlich, wenn f die Brennweite, n den Brechungsexponenten und r den Halbmesser der Linse bedeutet, die Beziehung gilt:

$$f = \frac{r}{2(n-1)}. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Aber nicht alles in der Richtung bb' durch die Linse gehende Licht tritt aus der Linse aus, sondern ein Theil davon wird an der Hinterfläche in der Richtung $b'b''$ reflectirt, wobei $\angle Mb'b = \angle Mb'b''$. Behielte nun das Licht seine Richtung $b'b''$ auch nach dem Austritt aus der Linse bei, so würde es die Axe in einem Punkte d'' treffen, dessen Entfernung von der Linse unter der Voraussetzung berechnet werden soll, dafs die Linse klein und schwach gekrümmt und also auch sehr dünn sey, weswegen $d''b'' = d''i' = d''o = d''i''$ angenommen werden kann.

Nun gilt für das in der Richtung bb' einfallende und von der Hinterfläche reflektirte Licht, wenn es beim Austritt aus der Linse seine Richtung beibehält und also die Axe in d'' treffen würde, die Beziehung:

$$e'' = \frac{f'}{1 + \frac{f'}{e}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wenn $e'' = d''i''$, f' die Brennweite der Hinterfläche der Linse, als Spiegelfläche angesehen und e die Entfernung des Punktes c, in welchem das verlängerte bb' die Axe trifft, von der Linse bedeutet.

Die Gröfse e ist leicht zu berechnen.

Es ist nämlich in dem Dreieck cbM':

$$\sin(180 - \alpha) : \sin\beta = cb : cM';$$

d. h.

$$n : 1 = e : e - r,$$

woraus:

$$e = \frac{nr}{n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man diesen Werth von e in den von e'', so wird:

$$e'' = \frac{f'}{1 + \frac{(n-1)f'}{nr}},$$

oder bei gleichzeitiger Beachtung, dafs $f' = \frac{1}{2}r$:

$$e'' = \frac{nr}{3n-1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

In Wirklichkeit nun trifft der Strahl $b'b''$ die Axe nicht in d'', sondern er wird von dem Einfallsloth $M'b''$, mit welchem er den Winkel $M'b''b' = gb''d'' = \delta$ bildet, weggebrochen; der Brechungswinkel $gb''d'$ sey δ'; es gilt alsdann die Beziehung:

$$\sin\delta' : \sin\delta = n : 1.$$

Nimmt man statt δ und δ' ihre Nebenwinkel, so ist:

$$\sin M'b''d' : \sin M'b''d'' = n : 1. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nun gilt aber für die Dreiecke $M'b''d'$ und $M'b''d''$ die Gleichung:

$$\sin M'b''d' : \sin d'M'b'' = M'd' : b''d' \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und

$$\sin d''M'b'' : \sin d''b''M' = b''d'' : M'd''. \quad . \quad . \quad (7)$$

Durch Multiplication der Gleichungen (6) und (7) mit einander erhält man, wenn man beachtet, dafs $\angle d''M'b'' = \angle d'M'b''$:

$$\sin M'b''d' : \sin d''b''M' = M'd' \,.\, b''d'' : b''d' \,.\, M'd''. \quad (8)$$

Durch Vergleichung mit (5) ergiebt sich hieraus:

$$n : 1 = M'd' \,.\, b''d'' : d''d' \,.\, M'd'',$$

oder:

$$M'd' \,.\, b''d'' = n \,.\, b''d' \,.\, M'd'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Bedeutet nun e' die Entfernung des Punktes d' von der Linse, wobei $d'i' = d'o = d'i'' = d'b''$ genommen werden kann, so hat man:

$$d'b'' = e'; \; M'd' = r + e'; \; d''b'' = e'' \text{ und } M'd'' = r + e''.$$

Die Gleichung (9) erlangt nach Einsetzung dieser Werthe folgende Gestalt:

$$(r + e')\,e'' = n\,e'(r + e''),$$

woraus:

$$r\,e'' - n\,e'r = (n - 1)\,e'e''.$$

Dividirt man die ganze Gleichung mit $r\,e'e''$, so wird:

$$\frac{1}{e'} - n \,.\, \frac{1}{e''} = (n - 1) \,.\, \frac{1}{r}.$$

Beachtet man nun Gleichung (4), so ergiebt sich:

$$\frac{1}{e'} - \frac{3n - 1}{r} = \frac{n - 1}{r},$$

woraus schliefslich:

$$\frac{1}{e'} = \frac{2(2n - 1)}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Vergleicht man nun die Werthe von f (1) und e' (10), so hat man:

$$\frac{e'}{f} = \frac{n - 1}{2n - 1}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn z. B. der Brechungsexponent $n = \frac{3}{2}$ ist, so wird:

$$f = r, \; e' = \frac{r}{4} \text{ und } \frac{e'}{f} = \tfrac{1}{4};$$

es liegt also dann der Punkt d' um $\frac{1}{4}$ des Radius oder der Brennweite von der Linse weg.

Ist ferner, wie bei einer Quarzlinse, $n = 1{,}562$ und $r = 1500^{mm}$, so findet sich

$$f' = 750^{mm}; \; f = 1334{,}5^{mm}; \; e' = 353^{mm} \text{ und } \frac{e'}{f} = 0{,}26;$$

es ist also der Punkt d' um kaum mehr als ein Viertel der Brennweite von der Linse entfernt.

Es gilt nun noch nachzuweisen, dafs die äufsersten der an der hinteren Linsenfläche reflektirten Strahlen einen gröfseren Winkel mit der Axe bilden, als die äufsersten der an der Vorderfläche reflectirten Strahlen, so dafs die ersteren in einiger Entfernung von der Linse einen gröfseren Lichtkreis auf dem Schirm erzeugen müssen, als die letzteren.

Man ziehe den Strahl AL parallel der Axe; er möge mit dem Einfallsloth $M'L$ den Winkel μ bilden; dann bildet der an der vorderen Fläche reflectirte Strahl LA' einen Winkel 2μ mit der Axe.

Sei ferner $L'd'$ der äufserste an der hinteren Fläche reflectirte Strahl, so gilt, wenn $L'o = h$ und $\angle L'd'o = \vartheta$ gesetzt wird:

$$\frac{h}{r} = \operatorname{tg}\mu,$$

wobei $M'o = r$ genommen worden.

Da nun

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{1 - \operatorname{tg}\mu^2}{2 \operatorname{tg}\mu},$$

so folgt:

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2\frac{h}{r}}{1 - \frac{h_2}{r^2}} = \frac{2hr}{r^2 - h^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Ferner ist:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{h}{e'};$$

setzen wir hierin für e' seinen Werth aus (10), so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{2h(2n-1)}{r}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Aus (12) und (13) aber folgt die Beziehung:

$$\operatorname{tg} 2\mu : \operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{1 - \frac{h^2}{r^2}} : (2n - 1) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Da nun h im Verhältnifs zu r sehr klein, als $\frac{h^2}{r^2}$ nahezu Null ist, so ist $\frac{1}{1 - \frac{h^2}{r^2}}$ nicht viel über 1; es müfste, was

übrigens nicht zulässig, wenn die Linse einigermafsen brauchbar seyn soll, h schon gleich $\frac{1}{2}r$ seyn, damit $\frac{1}{1-\frac{h^2}{r^2}}$ den Werth $\frac{4}{3}$ erreichte; dagegen ist, selbst wenn Wasser als brechende Substanz vorausgesetzt wird, $2n-1=\frac{5}{3}$ (für $n=\frac{3}{2}$ aber ist $2n-1=2$ und für $n=1{,}63$ ist $2n-1=2{,}26$).

Hieraus geht hervor, dafs jedenfalls 2μ kleiner ist als ϑ.

Es dürfte nun noch von Interesse seyn zu berechnen, in welcher Entfernung von der Linse der durch die Reflexion des Lichts an der Hinterfläche gebildete Lichtkegel den durch die Reflexion an der Vorderfläche gebildeten schneidet.

Man ziehe von dem Punkte v, in welchem die äufsersten Strahlen der zwei Lichtkegel einander treffen, eine Linie vw senkrecht zur Linsenaxe, dann ist:

$$\frac{vw}{d'w}=\operatorname{tg}\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{vw}{pw}=\operatorname{tg}2\mu.$$

Hieraus folgt:

$$d'w\,.\operatorname{tg}\vartheta=pw\,.\operatorname{tg}2\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Nun ist aber:

$$pw=po+od'+d'w.$$

Setzt man nun für po und od' die Werthe $\frac{h}{\operatorname{tg}2\mu}$ und $\frac{h}{\operatorname{tg}\vartheta}$ in die letzte Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$pw=\frac{h}{\operatorname{tg}2\mu}+\frac{h}{\operatorname{tg}\vartheta}+d'w.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes von pw in (15) erhält man:

$$d'w\,.\operatorname{tg}\vartheta=h+\frac{h\,.\operatorname{tg}2\mu}{\operatorname{tg}\vartheta}+d'w\,.\operatorname{tg}2\mu,$$

woraus sich ableiten läfst:

$$d'w=\frac{h(\operatorname{tg}\vartheta+\operatorname{tg}2\mu)}{\operatorname{tg}\vartheta(\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}2\mu)}=\frac{h\left(1+\frac{\operatorname{tg}2\mu}{\operatorname{tg}\vartheta}\right)}{\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}2\mu}\quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Um nun aber die Entfernung des Punktes w von der Linse zu finden, kann man die Gleichung aufstellen:

$$ew=d'o+d'w=e'+d'w=\frac{r}{2(2n-1)}+\frac{h\left(1+\frac{\operatorname{tg}2\mu}{\operatorname{tg}\vartheta}\right)}{\operatorname{tg}\vartheta-\operatorname{tg}2\mu}.$$

Beachtet man den Werth von $\operatorname{tg}\vartheta$ (13) so findet sich:

$$ow = \frac{h\left[2(2n-1) + \frac{r}{h}\operatorname{tg}2\mu\right] + r(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu)}{2(2n-1)(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu)}$$

oder:

$$ow = \frac{2h(2n-1) + r\operatorname{tg}\vartheta}{2(2n-1)(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu)} = \frac{\frac{2h(2n-1)}{\operatorname{tg}\vartheta} + r}{\frac{2(2n-1)}{\operatorname{tg}\vartheta}(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu)}.$$

Woraus mit Beachtung des Werthes von $\operatorname{tg}\vartheta$:

$$ow = \frac{2h}{\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Berechnet man aus (12) und (13) den Werth von $\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu$, so findet sich:

$$\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu = \frac{2h[2nr^2 - 2r^2 - 2nh^2 + h^2]}{r(r^2 - h^2)}.$$

Diesen Werth in (17) eingesetzt, giebt:

$$ow = \frac{r(r^2 - h^2)}{2r^2(n-1) - h^2(2n-1)}. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ist z. B. bei einer gleichgewölbten biconvexen Glaslinse $r = 18^{cm}$, $h = 3^{cm}$, $n = \frac{3}{2}$, so erhält $ow = 18{,}53^{cm}$. Ist ferner bei einer Quarzlinie $r = 150^{cm}$, $h = 3^{cm}$, $n = 1{,}562$, so erhält man $ow = 134^{cm}$. Will man noch den gemeinschaftlichen Radius vw der Schnittfläche der beiden Lichtkegel berechnen, so geht man von der Gleichung:

$$\frac{vw}{d'w} = \operatorname{tg}\vartheta$$

aus.

Daraus folgt:

$$vw = d'w \,.\, \operatorname{tg}\vartheta$$

und man findet nun mit Benutzung des Werthes von $d'w$ aus (16):

$$vw = h \,.\, \frac{\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}2\mu}{\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}2\mu}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe für $\operatorname{tg}\vartheta$ und $\operatorname{tg}2\mu$ aus (12) und (13), so erhält man schliefslich:

$$vw = h \,.\, \frac{(r^2 - h^2)(2n-1) + r^2}{(r^2 - h^2)(2n-1) - r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Ist z. B. $r = 18^{cm}$, $h = 3^{cm}$, $n = \frac{3}{2}$, so findet sich:

$$vw = 9{,}35^{cm}.$$

Ist ferner $r = 150^{cm}$, $h = 3^{cm}$, $n = 1{,}562$, so erhält man:

$$vw = 8{,}34^{cm}.$$

Steht die Linse um eine Strecke vom Laden ab, welche gröfser ist, als ow, so sieht man, wie schon Eingangs erwähnt worden ist, rund um die Röhre am Laden einen hellen Ring, welcher noch von einem farbig gesäumten halbhellen Ring umgeben ist. Rückt man näher, so wird der halbhelle Ring rascher an Gröfse abnehmen, als der ganz helle, und wenn die Entfernung von dem Laden $\overline{\overline{<}}\, ow$, da sieht man nur einen hellen Ring. Da die Röhre am Laden gewöhnlich $4\frac{1}{2}$ bis 6^{cm} Halbmesser hat, so kann man, da der Halbmesser vw des Durchschnittskreises beider Lichtkegel in den vorhin erwähnten Beispielen 8,34 bis $9{,}35^{cm}$ beträgt, die Erscheinung mit solchen Linsen noch recht wohl bis zu dem Punkt verfolgen, wo der halbhelle Ring verschwindet; besser ist es aber eine Linse von etwas gröfserem Oeffnungs-Halbmesser h zu nehmen, denn die Gröfse vw wächst mit dem Halbmesser h: nimmt man z. B. eine Crownglaslinse von 50^{cm} Brennweite, deren Brechungsexponent $= 1{,}53$ und deren Oeffnungs-Halbmesser $h = 4^{cm}$, so wird $vw = 11{,}6$, was vollkommen hinreicht, um die Erscheinung zu übersehen.

Allerdings finden an den beiden Linsenflächen nicht blos die hiergenannten, sondern auch noch andere, wiederholte Reflexionen statt, allein diese lassen sich experimentell kaum mehr auf eine einfache Art nachweisen.

VIII. *Ueber den scheinbaren Ort eines in einem dichteren durchsichtigen Medium befindlichen, sowie eines durch eine sogenannte planparallele Platte betrachteten Lichtpunktes;*
von K. L. Bauer in Karlsruhe.

In einem der neusten Hefte der Schlömilch'schen Zeitschrift f. Math. u. Phys., 19. Jahrg., S. 176 bis 180, hat Hr. Ludwig Matthiefsen „elementare Beweise zweier bekannten Theoreme aus der Optik" mitgetheilt. Eins derselben bezieht sich auf die durch die Lichtbrechung verursachte scheinbare Ortsänderung eines in einem dichteren Medium befindlichen Körpers. „Dieser bekannte Erfahrungssatz", bemerkt Hr. Matthiefsen, „dürfte wohl kaum in irgend einem Lehrbuche der Physik fehlen; dagegen wird der mathematische Beweis desselben merkwürdigerweise überall vermifst. Der wahre Sachverhalt ist wohl von vornherein nicht so evident, dafs derselbe keines Beweises bedürfte usw.". — Der angeführten, wohl begründeten Bemerkung habe ich meinerseits beizufügen, dafs sehr viele gröfsere und kleinere physikalische Lehrbücher ein noch weit härterer Tadel trifft, indem sie geradezu gänzlich unrichtigen Ansichten über die erwähnte scheinbare Ortsveränderung Vorschub leisten; unten im Abschnitt V mehr darüber!

Das in Rede stehende Problem ist, um gleich von vornherein den eigentlichen Charakter desselben zu bezeichnen, nur ein specieller Fall der allgemeinen Aufgabe über die *Bestimmung der kaustischen Linie* oder *Brennlinie.* Ist in einer Ebene eine beliebige Curve und ein Punkt gegeben, und sendet der letztere in stetiger Folge Strahlen nach der Curve, die den Gesetzen der Optik gemäfs reflectirt oder gebrochen werden, so bestimmen die reellen, oder virtuellen Schnittpunkte je zweier successiven zurückgeworfenen, oder gebrochenen Strahlen eine neue Linie, die

Einhüllende oder *Enveloppe* dieser Strahlen, welche von den letzteren *tangirt* wird, und die *katakaustische* oder *diakaustische* Linie heifst; sie läfst sich durch Bestimmung der von beiden Curven begrenzten Strecke eines reflectirten oder gebrochenen Strahles ermitteln. Das Problem hat ein Alter von nahe zwei Jahrhunderten, und am Schlusse dieses Aufsatzes soll die Geschichte desselben in Erinnerung gebracht werden.

Den besonderen Fall, wo die brechende Linie eine *Gerade* ist, findet man unter andern behandelt in Schlömilch's Compendium der höhern Analysis, 2. Aufl. Bd. I, S. 132—133; treten die gebrochenen Strahlen in ein optisch dünneres Medium über, so ist die Einhüllende derselben eine *Ellipsenevolute*. Das in der Analysis zur Bestimmung einer Enveloppe übliche Verfahren ist indessen überall da, wo nur Elementarmathematik verwandt werden darf, schlechterdings unbrauchbar.

Hr. Matthiefsen, der sich mit dem gleichen Falle befafst, unterläfst es, Namen und Charakter der Diakaustik genau festzustellen; sein Verfahren ist übrigens mit der auf den allgemeinen Fall angewandten Methode Klügel's (math. Wörterb., Art. Diacaustica, S. 752 etc.) im wesentlichsten Theile identisch; nur die Bezeichnungen weichen durchgängig von einander ab:

Klügel:	ω	φ	$d\omega$	$d\varphi$	ds	z	u	m	n.
Matthiefsen:	v	u	δ'	δ	l	r	ϱ	c_1	c_2.

Ich glaubte, auf das Factum hinweisen zu müssen, ohne indessen Hrn. M., der in seiner Mittheilung keinerlei Quelle citirt, irgend einen Vorwurf machen zu wollen.

Lang bevor mir H. Matthiefsen's Aufsatz zu Gesicht kam, hatte ich mich ebenfalls mit dem gleichen Specialfalle befafst, der für die Physik in mehrfacher Beziehung von erheblicher Wichtigkeit, leider aber nicht wenig Physikern nur höchst unvollkommen, oder gar nicht bekannt ist, wozu unten schlagende Beweise folgen. Erst die schönen Herbstferien setzten mich in den Stand, meine

Arbeit in eine zur Veröffentlichung geeignete Form zu bringen. Die von mir eingeschlagene Methode, bei welcher auch die Elementarmathematik genügt, liefs mich zu einer sehr vollständigen Lösung der Aufgabe und zu ganz präcisen *Gesetzen* über die scheinbare Ortsänderung gelangen; möchten dieselben im Kreise der Fachgenossen, welchen ich diesen kleinen Beitrag zur Förderung der Erkenntnifs hiermit vorlege, freundliche Beachtung finden!

I.

Bestimmung des scheinbaren Ortes eines in einem dichteren Medium befindlichen Lichtpunktes.

In einem dichteren Medium, z. B. *Wasser*, befinde sich ein leuchtender Punkt P (Fig. 5 Taf.)IV; die Zeichnungsebene sei vertical durch diesen Punkt und ein denselben betrachtendes Auge gelegt; BG sei die horizontale Gränzlinie zwischen Wasser und Luft; der wahre Abstand des leuchtenden Punktes von der Oberfläche sey $PO = h$. Ein beliebiger von P ausgesandter Strahl treffe die Gränze beider Medien unter dem Einfallswinkel β und werde unter dem Winkel α gebrochen; ein zweiter benachbarter Strahl bilde die entsprechenden Winkel β' und α', so dafs die beiden Strahlen im Wasser unter dem Winkel $(\beta' - \beta)$, in der Luft unter dem Winkel $(\alpha' - \alpha)$ divergiren. Passiren die gebrochenen Strahlen beide die Pupille eines Auges, so entsteht in M ein virtuelles *Bild* des Punktes P; da indessen gleichzeitig noch unzählige andere benachbarte Strahlen, welche nicht sämmtlich genau vom nämlichen Punkte zu kommen scheinen, die Netzhaut treffen, so wird das Bild niemals vollkommen scharf seyn; die Schärfe wird auf Kosten der Helligkeit zunehmen, wenn man das Auge von der Gränze der Medien entfernt, oder mit einem Diaphragma versieht, d. h. wenn man durch eine feine Oeffnung schaut. Schon der blofse Anblick der Figur lehrt, *dafs die scheinbare Ortsänderung sich aus einer verticalen und einer horizontalen Componente zusammensetzt, und dafs nicht blos die erstere, sondern auch die*

letztere eine Annäherung gegen das beobachtende Auge hin bewirkt.

Behufs genauer Feststellung dessen wählen wir O zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, OA zur Axe der positiven x, und OG zur Axe der positiven y. Bei Benutzung einiger durch die Figur leicht verständlichen Bezeichnungen existiren dann für die Ermittelung der Coordinaten des Punktes M folgende Relationen:

$$\begin{aligned} &1)\quad y + u + v = h \,.\, \text{tang}\,\beta' \\ &2)\quad y + u \phantom{{}+v} = h \,.\, \text{tang}\,\beta \\ &3)\quad \phantom{y+{}} u + v = x \,.\, \text{tang}\,\alpha' \\ &4)\quad \phantom{y+{}} u \phantom{{}+v} = x \,.\, \text{tang}\,\alpha. \end{aligned}$$

Verbindet man sowohl die beiden ersten, als die beiden letzten dieser Gleichungen durch Subtraction, so erhält man *zwei* Ausdrücke für v, und durch Gleichsetzung derselben eine zur Bestimmung von x geeignete Relation:

$$v = h\,(\text{tang}\,\beta' - \text{tang}\,\beta) = x\,(\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha).$$

$$5)\quad x = h \,.\, \frac{\text{tang}\,\beta' - \text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha} = h \,.\, \frac{\cos\alpha'\ \cos\alpha \,.\, \sin(\beta' - \beta)}{\cos\beta'\ \cos\beta \,.\, \sin(\alpha' - \alpha)}\,.$$

Der geometrische Sinn der Winkeldifferenzen $(\beta' - \beta)$ und $(\alpha' - \alpha)$ wurde bereits oben angegeben. Nach der Bestimmung von x folgt auch sofort ein Ausdruck für y, indem man die Gleichungen 1) und 3) durch Subtraction verbindet.

$$6)\quad y = h \,.\, \text{tang}\,\beta' - x \,.\, \text{tang}\,\alpha'.$$

Wegen der kleinen Oeffnung der Pupille haben wir jetzt zu untersuchen, welchen *Grenzwerthen* sich die Coordinaten des Punktes M nähern, wenn β' in β, und α' daher in α übergeht; dabei stellen sich Differentiale und Differentialquotienten ein;

$$\lim.\ \frac{\text{tang}\,\beta' - \text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha} = \frac{d\,\text{tang}\,\beta}{d\,\text{tang}\,\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} \,.\, \frac{d\beta}{d\alpha}\,.$$

$$\lim.\ \frac{\sin(b' - \beta)}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \lim.\ \left\{\frac{\dfrac{\sin(\beta' - \beta)}{\beta' - \beta}}{\dfrac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\alpha' - \alpha}} \,.\, \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\right\} = \frac{1}{1} \,.\, \frac{d\beta}{d\alpha}\,.$$

Die gewünschten Gränzwerthe sind demnach die folgenden:

$$7)\quad x = h \cdot \frac{d \tang \beta}{d \tang \alpha} = h \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

$$8)\quad y = h \cdot \tang \beta \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\tang \alpha}{\tang \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$

$$= h \cdot \tang \beta \left(1 - n \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

wobei n den auf Luft bezogenen Brechungsexponenten des dichteren Mediums bedeutet. Zur Bestimmung des Differentialquotienten $d\beta : d\alpha$ dient die Gleichung

$$\sin \alpha = n \sin \beta;$$

der Verfasser hat bereits vor mehreren Jahren in einem Aufsatze über die Brechung des Lichts, Bd. 131 dieser Annalen, Ausdrücke für den genannten und ähnliche Differentialquotienten bekannt gemacht, die unterdessen Beachtung gefunden haben (vergl. Dr. H. Emsmann, sechszehn mathem. phys. Probleme, Leipzig 1869, und P. Münch, Lehrb. d. Phys., Freiburg i. Br. 1873), und welche auch hier wieder vortreffliche Dienste leisten:

$$n \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = n \cdot \frac{\tang \beta}{\tang \alpha} = \sqrt{1 - (n^2 - 1) \tang^2 \beta}$$

Nach Einführung dieser Ausdrücke stellen sich die Gränzwerthe der Coordinaten von M unter folgenden Formen dar:

$$9)\quad x = \frac{h}{n}\left(n \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3 = \frac{h}{n}\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right)^3 = \frac{h}{n}\left\{1 - (n^2 - 1) \tang^2 \beta\right\}^{\frac{3}{2}}.$$

$$10)\quad y = h \cdot \tang \beta \left\{1 - \left(n \cdot \frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\} = h\,(n^2 - 1) \tang^3 \beta.$$

Diese Darstellungen von x und y als Functionen von h, n und β dürften schwerlich etwas zu wünschen übrig lassen, da sie die Gesetze der scheinbaren Ortsänderung mit vollkommener Genauigkeit und Klarheit anzeigen.

II.

Gesetze der scheinbaren Ortsveränderung.

1) *Die zur Trennungsfläche der Medien normale Verschiebungscomponente $\xi = h - x$, und die dieser Fläche parallele Verschiebungscomponente oder Tangentialcomponente y sind beide dem Abstande h des leuchtenden Punktes von der Gränzfläche der Medien direct proportional.*

2) *Beide Verschiebungscomponenten wachsen gleichzeitig mit dem auf Luft bezogenen Brechungsexponenten des dichteren Mediums, und zwar ist die Tangentialcomponente y proportional der brechenden Kraft $(n^2 - 1)$ des dichteren Mediums.*

3) *Beide Verschiebungscomponenten wachsen gleichzeitig mit dem Einfallswinkel β, und zwar ist die Tangentialcomponente y dem Kubus der Tangente des Einfallswinkels proportional.*

4) *Die Componenten bewirken beide eine scheinbare Annäherung des leuchtenden Punktes gegen das ihn betrachtende Auge.*

Hat β seinen Minimalwerth, $\beta = 0$, befindet sich also in Fig. 1 das Auge vertical über dem leuchtenden Punkte P, so ist auch die scheinbare Normal- und Tangentialverschiebung des letzteren möglichst klein:

$$\xi_0 = h - x_0 = h - \frac{h}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) h, = \frac{1}{4}\, h \text{ für Wasser.}$$

$$y_0 = 0.$$

Der scheinbare Ort des im Wasser gedachten Punktes P ist für diesen Fall in der Figur mit N bezeichnet; nur in diesem einzigen Falle besteht die Ortsänderung in einer bloſsen Hebung, ohne Horizontalverschiebung. Auf die bemerkenswerthe einfache Beziehung

$$n = \frac{h}{x_0} = \frac{h}{h - \xi_0}$$

gründete i. J. 1767 der Duc de Chaulnes eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Brechungsexponenten; doch ist dieselbe nach Hrn. Quincke's Untersuchung

(diese Ann. Bd. 132, S. 220) nicht sehr genau, und fallen besonders bei kleinem Objectabstand oder starker Vergrößerung die Werthe von n zu groß aus.

Erreicht β sein Maximum, den sog. Gränzwinkel γ, der durch die Gleichung

$$\sin\gamma = \frac{1}{n}, \text{ oder } \tang\gamma = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

bestimmt ist, so resultiren auch die Maxima der Verschiebungscomponenten:

$$\xi_\gamma = h - x_\gamma = h - 0 = h.$$

$$y_\gamma = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}} = h \,.\, \tang\gamma = OG \text{ in Fig. 5 Taf. IV.}$$

Befindet sich demnach das Auge in gleicher Höhe mit der Wasseroberfläche und fängt es die streifend austretenden Strahlen auf, so erscheint Punkt P sowohl im verticalen als horizontalen Sinne am beträchtlichsten *gegen das Auge hin* verschoben; P erscheint in G, also in der Trennungsfläche der Medien und genau an der Stelle, an welcher der Strahl unter dem Gränzwinkel einfällt und streifend gebrochen wird. Für Wasser ist:

$$y_\gamma = h \,.\, \tang(48^\circ\ 35') = 1{,}1336\, h.$$

Ließe sich y_γ mit ziemlicher Sicherheit experimentell bestimmen, so besäße man eine weitere Vorschrift zur näherungsweisen Ermittelung des Brechungsexponenten, indem:

$$n = \sqrt{1 + \cotg^2\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{y_\gamma}\right)^2}.$$

Diese Gleichung kann auch als specieller Fall der leicht zu beweisenden Formel

$$n = \sin\alpha \,.\, \sqrt{1 + \left(\frac{h}{e}\right)^2}$$

betrachtet werden, worin e die gegenseitige Entfernung der beiden Einfallslothe eines eine planparallele Platte passirenden Strahles bedeutet, da für $\alpha = 90^\circ$ die Größe e

mit y_γ gleichbedeutend ist; vergl. diese Ann. Bd. 97, S. 141 etc.

Bewegt sich ein Auge dergestalt, daſs es nach und nach alle gebrochenen Strahlen auffängt, die unter Winkeln von $\beta = 0$ bis $\beta = \gamma$ eingefallen waren, so beschreibt Punkt P scheinbar eine gegen die Trennungsfläche der Medien convex liegende *Curve* von N durch M (dieser Punkt ist in der Figur wegen zu groſser Verschiedenheit von β' und β nicht ganz genau) nach G; über die genauere Beschaffenheit dieser Curve geben unsere Entwickelungen klaren Aufschluſs.

III.

Die Einhüllende der gebrochenen Strahlen.

Die Gleichung der bezeichneten *diakaustischen Linie*, der *Einhüllenden* der gebrochenen Strahlen, ergiebt sich sogleich, wenn wir aus den für die Coordinaten x und y gefundenen Ausdrücken den Einfallswinkel β eliminiren; wir erhalten:

$$(n^2 - 1) \operatorname{tang}^2 \beta = 1 - \left(\frac{n}{h} x\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{h} y\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\left(\frac{x}{h : n}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{h : \sqrt{n^2 - 1}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{h \sin \gamma}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{h \operatorname{tang} \gamma}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{y_\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{ON}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{OG}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Diese Gleichung beweist, daſs die fragliche Diakaustik die *Evolute* (Ort der Krümmungsmittelpunkte) *einer Ellipse* ist, daſs mithin die gebrochenen Strahlen sämmtlich auf einer gewissen Ellipse senkrecht stehen, während sie deren Evolute berühren. Zur genauen Feststellung dieser Ellipse, der *orthogonalen Transversale* der gebrochenen Strahlen, ist folgendes zu bemerken. Bedeutet, wie gewöhnlich:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, und

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

die Gleichung der zugehörigen Evolute, so bestehen die Relationen:

$$a^2 - b^2 = a a_1 = b b_1\,,\ \text{woraus}\ a_1 : b_1 = b : a.$$

In unserm besondern Falle ist:

$$a_1 = h \,.\, \sin\gamma;\ \ b_1 = h \,.\, \mathrm{tg}\,\gamma.$$

$$a_1 : b_1 = \cos\gamma = b : a;\ \ b = a\cos\gamma.$$

$$a^2 - b^2 = a^2 \sin^2\gamma = a h \sin\gamma.$$

$$a = h : \sin\gamma = h \,.\, n = OA.$$

$$b = h : \mathrm{tg}\,\gamma = h \,.\, \sqrt{n^2 - 1} = OB.$$

$$a a_1 = b b_1 = a^2 - b^2 = h^2 = (OP)^2.$$

Hieraus folgt, dafs $h = OP$ die *lineare Excentricität*, und der leuchtende Punkt P selbst ein *Brennpunkt* der Ellipse ist; die Halbachsen derselben sind in Fig. 6 Taf. IV construirt:

$$PX = h : \sin\gamma = a;\ \ PY = h : \mathrm{tg}\,\gamma = b;$$

den betreffenden Ellipsenquadranten zeigt Fig. 5 Taf. IV.

IV.

Elementare Entwicklung der Coordinaten.

Wir erhielten oben in I auf ganz elementarem Wege die Resultate:

$$5)\quad x = h \cdot \frac{\cos\alpha' \cos\alpha \sin(\beta' - \beta)}{\cos\beta' \cos\beta \sin(\alpha' - \alpha)}$$

$$6)\quad y = h \,.\, \mathrm{tg}\,\beta' - x \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha'$$

Geht nun β' in β, und daher α' in α über, so nimmt der Quotient $\sin(\beta' - \beta) : \sin(\alpha' - \alpha)$ die unendlich vieldeutige Form $0 : 0$ an, weshalb es einer besondern Ermittlung des wahren Werthes bedarf. Zu diesem Zwecke wollen wir

$$\beta' = \beta + \varDelta\beta;\quad \alpha' = \alpha + \varDelta\alpha$$

setzen, dann wird:

$$\frac{\sin(\beta' - \beta)}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \frac{\sin \varDelta\beta}{\sin \varDelta\alpha}.$$

Verbindet man die Gleichungen:

$$\sin\alpha = n\sin\beta; \quad \sin(\alpha + \Delta\alpha) = n\sin(\beta + \Delta\beta)$$

durch Subtraction, so folgt:

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin\alpha = n\{\sin(\beta + \Delta\beta) - \sin\beta\}.$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = n\cos\left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\beta}{2}.$$

$$\frac{\sin\frac{\Delta\beta}{2}}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} = \frac{1}{n}\,\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2}\right)}.$$

Convergiren jetzt $\Delta\beta$ und $\Delta\alpha$ gegen Null, so erhält der Quotient links den Gränzwerth:

$$\lim.\frac{\sin\frac{\Delta\beta}{2}}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}} = \frac{0}{0} = \frac{1}{n}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Genau gegen denselben Werth convergirt aber bei verschwindendem $\Delta\beta$ und $\Delta\alpha$ der ähnliche Quotient:

$$\frac{\sin\Delta\beta}{\sin\Delta\alpha} = \frac{2\sin\frac{\Delta\beta}{2}\cos\frac{\Delta\beta}{2}}{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\cos\frac{\Delta\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\Delta\beta}{2}}{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\Delta\beta}{2}}{\cos\frac{\Delta\alpha}{2}},$$

da $\lim.\left\{\cos\frac{\Delta\beta}{2} : \cos\frac{\Delta\alpha}{2}\right\} = 1 : 1 = 1$. Setzt man noch:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - n^2\sin^2\beta} = \sqrt{\cos^2\beta - (n^2 - 1)\sin^2\beta},$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{1 - (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2\beta},$$

so erhält man, ohne von der Differentialrechnung Gebrauch gemacht zu haben, die Grenzwerthe der Coordinaten wie oben:

$$9)\quad x = \frac{h}{n}\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^3 = \frac{h}{n}\{1 - (n^2 - 1)\operatorname{tg}^2\beta\}^{\frac{3}{2}}.$$

$$10)\quad y = h\operatorname{tg}\beta\left\{1 - \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2\right\} = h(n^2 - 1)\operatorname{tg}^3\beta.$$

Und hieran lassen sich die in II mitgetheilten Gesetze und Specialfälle, sowie die in III vorgenommene Elimination von β anschliefsen.

V.

Experimentelle Bestätigung; Kritisches.

Um mich von der oben entwickelten scheinbaren Ortsveränderung experimentell zu überzeugen, stellte ich eine cylindrische, etwa 23cm weite und 11cm tiefe Glasschale auf ein passendes Stativ und füllte sie bis an den Rand mit klarem Wasser; an eine dem beobachtenden Auge ziemlich entlegene, mit einer undurchsichtigen Platte bedeckte Stelle des Gefäſsbodens brachte ich als leuchtendes Object einen Quecksilbertropfen (auch ein goldenes Hemdenknöpfchen und dergl. würde sich eignen); falls es nöthig erscheint, kann das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme durch Spiegel oder Linse auf den Gegenstand concentrirt werden. Bei der Beobachtung wird am besten das eine Auge geschlossen; senkt sich nun das schauende Auge allmählich bis in die Ebene des Flüssigkeitsspiegels, so bemerkt man deutlich nicht bloſs eine stets zunehmende verticale Erhebung, sondern auch eine gleichzeitig zunehmende Horizontalverschiebung des leuchtenden Punktes *gegen das Auge hin*, so daſs schlieſslich das Object in der Flüssigkeitsoberfläche selbst, und bedeutend gegen das Auge vorgeschritten, zu glänzen scheint, ganz wie die Theorie es verlangt.

In unsern Physikbüchern sieht es aber hinsichtlich des besprochenen Themas fürwahr traurig aus, und damit es besser hierin werde, will ich jetzt einige Schäden aufdecken:

1) Mousson, Physik II, 2, 1872, S. 304, Fig. 407, nimmt ohne Begründung an, die Verschiebung geschehe *nur* in normaler Richtung und gelangt auf Grund dieser unrichtigen Voraussetzung zu dem ebenfalls unrichtigen, und zwar zu groſsen Resultate: $x = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; der richtige Werth ist nach dem Obigen: $x = \frac{h}{n} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^3$.

2) Viele Verfasser geben zwar auch eine Tangentialverschiebung zu, aber nach der illustrirenden Figur zu

schliefsen, würde diese Componente eine scheinbare *Entfernung* des leuchtenden Punktes vom Auge bewirken, während es sich doch in Wahrheit gerade umgekehrt verhält. In diese Kategorie gehören unter andern:
1866; A. Wüllner, Lehrbuch I. 2, S. 675, Fig. 33.
1867; J. Crüger, Lehrbuch I. 2, S. 267, Fig. 229.
1868; J. Müller, Lehrbuch I., S. 535, Fig. 604.
1869; J. Riedel, Grundzüge, S. 148, Fig. 47.
1869; J. Schabus, Grundzüge, S. 320, Fig. 417.
1870; J. Crüger, Grundzüge, S. 145, Fig. 136.
1870; G. Krebs, Lehrbuch, S. 94, Fig. 116.
1871; J. Frick, Anfangsgründe, S. 103, Fig. 128.
1871; C. Bänitz, Lehrbuch, S. 117, Fig. 128.
1872; A. F. Weinhold, Vorschule, S. 286, Fig. 258.
1873; E. Jochmann, Grundrifs, S. 133, Fig. 141.

3) Manche Autoren scheinen in dem Irrthum befangen, dafs in dem besondern Falle, wo die Verbindungsstrecke des Auges mit dem leuchtenden Punkte senkrecht zur Grenzfläche der Medien steht, eine scheinbare Ortsänderung des Lichtpunktes *überhaupt nicht vorhanden sey*; so sagen a. a. O.:

Krebs, S. 94: „Daher kommt es, dafs ein Bach nicht so tief erscheint, wenn man *schief* in denselben hineinblickt."

Frick, S. 104: „Daher scheint das Wasser beim *schiefen* Hineinsehen immer weniger tief, als es wirklich ist."

In Wirklichkeit jedoch ist beim senkrechten Hineinschauen blofs die der Trennungsfläche beider Medien parallele Verschiebungscomponente $y_0 = 0$, während die Normalcomponente zwar auch ihren kleinsten, keineswegs aber den Werth Null hat, indem nach dem Obigen $\xi_0 = h - x_0 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) h$. Der Grund eines klaren Gewässers von 1 Meter Tiefe erscheint bei senkrechtem Hineinschauen um $\frac{1}{4}$ Meter, bei schiefer Ansicht um noch mehr zu hoch.

Eine rühmliche Ausnahme macht Harting in seinem trefflichen Buche über das Mikroskop, 1866 Bd. I, S. 19, Fig. 15, obgleich er die Tangentialverschiebung nicht zum Gegenstand der Untersuchung macht; die nämliche Figur nebst sehr ähnlichem Texte findet sich in dem im gleichen Verlage erschienenen Dippel, das Mikroskop, 1867, I, S. 31 u. 32. Bei Harting ist auch zu beachten I, S. 155 (über den Einfluſs der Deckplättchen) und II, S. 268 (mikroskopische Dickenmessung), insbesondere S. 271 bis 274. Von dem gleichfalls gerühmten Buche der Autoren Nägeli und Schwendener konnte ich bis jetzt leider noch nicht Einsicht nehmen.

VI.

Bestimmung des scheinbaren Ortes eines durch eine planparallele Platte angeschauten Lichtpunktes.

Unsere bisherigen Betrachtungen lassen sich ohne Schwierigkeit noch verallgemeinern. Nehmen wir an, es sey ein durchsichtiges Medium, dichter als Luft, zwischen ebenen parallelen Flächen eingeschlossen und ringsum von Luft umgeben. *Auſserhalb* dieser planparallelen Platte befinde sich ein leuchtender Punkt P in den Abständen k von der ersten, und $(k+h)$ von der zweiten Begrenzungsfläche, so daſs h die Plattendicke bedeutet; vergl. die genau der Fig. 5 Taf. IV entsprechende Fig. 7 Taf. IV. Ein jenseits der zweiten Begrenzungsfläche befindliches Auge fange diejenigen der von P ausgesandten Strahlen auf, welche nach Durchwanderung der Platte unter dem Brechungswinkel α und äuſserst wenig davon verschiedenen Winkeln wieder in Luft austreten; dann wird Punkt P in M erblickt, und es handelt sich jetzt darum, diesen scheinbaren Ort genau zu bestimmen. Behalten wir die bisherige Bezeichnung bei, so bedürfen nur zwei der in I aufgestellten vier ersten Gleichungen einer einfachen Modification; denn in Fig. 7 ist:

$$1)\quad y+u+v = h\,.\,\mathrm{tg}\beta' + k\,.\,\mathrm{tg}\alpha'$$
$$2)\quad y+u \qquad = h\,.\,\mathrm{tg}\beta + k\,.\,\mathrm{tg}\alpha$$

$$3)\quad u + v = x \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha'$$
$$4)\quad u = x \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Und hieraus ergiebt sich:

$$v = h(\mathrm{tg}\,\beta' - \mathrm{tg}\,\beta) + k(\mathrm{tg}\,\alpha' - \mathrm{tg}\,\alpha) = x \,.\, (\mathrm{tg}\,\alpha' - \mathrm{tg}\,\alpha).$$

$$5)\quad x - k = h \,.\, \frac{\mathrm{tg}\,\beta' - \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha' - \mathrm{tg}\,\alpha}$$

$$\xi = (h + k) - x = h - (x - k).$$

$$6)\quad y = h \,.\, \mathrm{tg}\,\beta' - (x - k) \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha'.$$

Diese einfachen Resultate unterscheiden sich mithin von den in I. erhaltenen einfach dadurch, *dafs jetzt* $(x - k)$ *an die Stelle des frühern* x *getreten ist; die beiden Verschiebungscomponenten* ξ *und* y *sind von der Gröfse* k *völlig unabhängig und blofs Functionen von* h, n *und* α *oder* β*; die früher für* ξ *und* y *erhaltenen Ausdrücke gelten ganz genau auch hier.*

Um nach der Methode des Duc de Chaulnes den Brechungsexponenten des die planparallele Platte bildenden durchsichtigen Mediums zu bestimmen, ist es also nicht nothwendig, nach Mousson's Angabe (a. a. O. S. 307) die Platte unmittelbar auf den Punkt P zu legen, wonach sich P gewissermafsen auf dem Grunde des dichtern Mediums befindet; denn hat P den willkürlichen Abstand k von der Platte, so erhält man:

$$n = \frac{h}{x_0 - k} = \frac{h}{(h + k - \xi_0) - k} = \frac{h}{h - \xi_0}.$$

Jedenfalls aber ist die Platte senkrecht zur optischen Axe des Mikroskops zu stellen.

VII.

Geschichtliches.

Betreffs der ältesten Geschichte der kaustischen Linie halte ich mich an das Referat von Klügel (math. Wörterb. 1803, Art. Brennlinie, S. 352 usw.).

Die Untersuchung über den *Durchschnittspunkt* zweier successiven zurückgeworfenen, oder gebrochenen Strahlen hat zuerst Isaac Barrow, Newton's Vorgänger in der

Professur der Mathematik zu Cambridge, angestellt (*Lectiones opticae* 1669, VI bis XIII). Sein Zweck war, die Stelle zu suchen, wo das Bild eines gegebenen Punktes liegt, den ein Auge durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen erblickt. Das Bild setzt er um den Durchschnittspunkt zweier nächsten Strahlen, den Grenzpunkt der Durchschnitte einander naher Strahlen, und zwar um den Punkt herum, weil die Augenöffnung einen gewissen Durchmesser hat. Barrow kam aber noch nicht auf die Betrachtung der Linie, welche die Reihe aller Bilder oder Grenzpunkte der Durchschnitte enthält.

Huyghens ist der erste, der die Entstehung der *Brennlinien* angegeben hat, doch nur für den Halbkreis und für auffallende Parallelstrahlen (*Traité de la lumière, Ch.* 6, verfaſst 1678, herausgeg. 1690; *Opera reliqua, Vol.* I). Von der Brennlinie durch Brechung begnügt sich H. zu bemerken, daſs man jeden Punkt derselben mittelst eines von Barrow vorgetragenen Lehrsatzes finden könne, und daſs sie rectificabel ist; denn er wendet sie eigentlich zur Erläuterung seiner Theorie vom Lichte und der Bewegung der Lichtwellen an. Ebenso behandelt er die Brennlinie durch Zurückwerfung; er zeigt nur an, wie jeder ihrer Punkte gefunden wird, bemerkt, daſs sie eine Art Cykloide ist, und giebt ihre Länge, sowie den zwischen ihr und dem Halbkreise enthaltenen Flächenraum an.

Ehe diese Lehrsätze bekannt gemacht wurden, versuchte Tschirnhausen die Brennlinie durch Zurückwerfung paralleler Strahlen von einem Halbkreise zu bestimmen; daſs seine Construction (*Act. Erud.* 1682) unrichtig ist, erwiesen de la Hire (1686) und Joh. Bernoulli (1692).

Die Analysten verfolgten die von Tschirnhausen und Huyghens angefangene Untersuchung eifrig und waren bald damit zu Stande. Jacob Bernoulli gab in den *Act. Erud.* 1692 eine allgemeine Formel, die Länge des zurückgeworfenen Strahls bis an die Brennlinie mit-

telst des Krümmungshalbmessers zu bestimmen. Er gab eine Construction, den Punkt der Diakaustika auf einem gegebenen Strahle zu finden (*Act. Erud.* 1693, *Curvae diacausticae earumque relatio ad evolutas*; *Op. T.* I *No.* 49, 56, womit noch *T.* II *No.* 103, *Art.* 17 zu verbinden ist). Die Benennungen *Katakaustika* und *Diakaustika* rühren von ihm her.

Sein Bruder Johann Bernoulli gab eine algebraische Gleichung für die Brennlinie durch Zurückwerfung vom Kreise (*Act. Erud.* 1692, *Op. T.* I *No.* 6) und handelte die ganze Materie von beiden Arten Brennlinien ausführlich ab in den *Lectionibus Hospitalianis* XXVI—XXXII, und LVI—LVIII. In der *Analyse des infiniment petits* (1696) des Marquis de l'Hospital ist sie mit grofser Deutlichkeit vorgetragen; (nach J. C. Poggendorff, Handwörterbuch, haben erst spätere Schriftsteller die Schreibweise l'Hôpital angenommen).

Zu vergl. ist auch Klügel, math. Wörterb. I, Art. Diacaustica S. 757—758, sowie bezüglich neuerer Arbeiten die von Grunert i. J. 1833 herausgegebenen Supplemente, Bd. I, Artikel: Caustische Flächen und Linien S. 349—408.

Karlsruhe, 24. August 1874.

IX. *Ueber neue Schwefelsalze;* *von R. Schneider.*

(Zehnte Abhandlung.)[1]

(Schlufs.)

---

35. Natriumthalliumsulfür-Thalliumsulfid und Siebensechstel-Schwefelthallium.

In No. 20 der vierten Abhandlung[2]) habe ich ein schön krystallisirendes Schwefelsalz des Thalliums beschrieben, das nach der Formel

$$K_2S_1\,Tl_2S_3$$

zusammengesetzt ist. Dasselbe wird mit Leichtigkeit erhalten, wenn man einen Theil Thalliumsulfat mit 6 Theilen kohlensaurem Kali und 6 Theilen Schwefel bei Rothglühhitze zusammenschmilzt und die erkaltete Schmelze mit Wasser behandelt.

Am Ende jener Abhandlung (l. c. S. 670) habe ich Folgendes gesagt:

„Ganz anders als gegen ein schmelzendes Gemenge von Pottasche und Schwefel verhält sich das Thalliumsulfat gegen ein solches von Soda und Schwefel. Die Schmelze erscheint in diesem Falle nach dem Erkalten fast ganz homogen und amorph; dieselbe giebt auf Wasserzusatz ein hellgelbes, undeutlich krystallinisches Pulver, das aber höchst unbeständig ist und sich in Berührung mit Luft und gröfseren Mengen von Wasser schnell tiefbraun färbt. Der ausgewaschene braune Rückstand, der an der Luft keine weitere Veränderung erleidet, scheint nur Thallium und Schwefel und zwar im Verhältnifs von 4 : 5 Atomen zu enthalten."

Ich bin jetzt in der Lage, diese vorläufige Mittheilung durch die nachstehenden Angaben vervollständigen zu können.

1) Neunte Abhandlung s. d. Ann. Bd. 151, S. 437.

2) Diese Ann. Bd. 139, S. 661.

Schmilzt man ein inniges Gemenge von einem Theil Thalliumsulfat, 6 Theilen trockner Soda und 6 Theilen Schwefel über der Gebläselampe zusammen und erhält man die Masse 8 bis 10 Minuten bei heller Rothgluth in gleichmäfsigem Flufs, so resultirt eine Schmelze, die nach dem Erkalten rothbraun und ganz homogen erscheint. Dieselbe zeigt bei der Behandlung mit Wasser ein sehr eigenthümliches Verhalten. Sie überkleidet sich nämlich, sobald Wasser hinzukommt, sofort mit einer dünnen Schicht von einem hellgelben, undeutlich krystallinischen Pulver, die sich, wenn sie durch Reiben mit dem Glasstab entfernt wird, sofort erneuert. Bei fortgesetzter Behandlung der Schmelze mit Wasser erhält man aufser diesem gelben Pulver, das sich allmählich in ein Haufwerk voluminöser Flocken verwandelt, eine dunkelgelbe Lösung, die neben Natriumpolysulfuret viel schwefelsaures Natron, aber kein Thallium enthält.

Das eben erwähnte gelbe Pulver besitzt indefs nur einen sehr geringen Grad von Beständigkeit. Selbst beim Verweilen unter Wasser nimmt es bald eine dunkelgelbe, dann eine hellbraune, allmählich eine dunkelbraune Farbe an; noch schneller tritt diese Farbenveränderung ein, wenn es, mit Wasser durchfeuchtet, dem freien Luftzutritt ausgesetzt ist.

Wäscht man den Rückstand, wenn seine Farbe sich nicht mehr verändert, so lange mit Wasser aus, bis die ablaufende Flüssigkeit sich von Schwefelnatrium völlig frei zeigt, so hinterbleibt ein glanzloses dunkelbraunes Pulver, das unter dem Mikroskop durchaus homogen und völlig amorph erscheint. Dasselbe enthält als wesentliche Bestandtheile nur Thallium und Schwefel; von Natrium ist es völlig frei. Nach dem Trocknen mit Schwefelkohlenstoff behandelt, giebt es nur eine Spur Schwefel an diesen ab.

Die Ausbeute pflegt für 10 Theile schwefelsaures Thalliumoxydul, die man angewendet hatte, etwa 9,5 Theile an trockner brauner Substanz zu betragen.

Die mit dieser angestellten Analysen haben Folgendes ergeben:

1) 0,200 Grm. (unter Kohlensäure scharf getrocknet) gaben, mit Kali und Salpeter geschmolzen, 0,231 Grm. schwefelsauren Baryt.

2) 0,126 Grm. (derselben Bereitung) durch verdünnte Schwefelsäure und einige Tropfen Salpetersäure zersetzt, gaben 0,172 Grm. Jodthallium.

3) 0,280 Grm. (mit Schwefelkohlenstoff behandelt und im Strom von trockener Kohlensäure bis zur beginnenden Schmelzung erhitzt) gaben 0,384 Grm. Jodthallium.

4) 0,230 Grm. (ebenso behandelt wie bei 3)) gaben nach dem Schmelzen mit Salpeter und Kali 0,260 Grm. schwefelsauren Baryt.

Diese Zahlen stimmen zwar annähernd zu der früher von mir vermutheten Formel $Tl_4 S_5$, befinden sich aber noch weit besser mit der Formel $Tl_6 S_7$ in Einklang, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich ist.

	Berechnet:		Gefunden:				Berechnet nach $Tl_4 S_5$
			I.	II.	III.	IV.	
Tl_6 = 1224	84,53	Proc.	—	84,13	84,50	—	83,60
S_7 = 224	15,47	„	15,79	—	—	15,52	16,40

Hiernach dürfte die Richtigkeit der Formel $Tl_6 S_7$ als erwiesen zu betrachten und die fragliche Verbindung demgemäfs als *Siebensechstel-Schwefelthallium* zu bezeichnen seyn.

Was die Bildung derselben betrifft, so halte ich die folgende Deutung nicht nur für zulässig, sondern für diejenige, die am meisten Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Ich glaube mit einigem Recht voraussetzen zu dürfen, dafs in der nach dem obigen Verfahren bereiteten trockenen Schmelze ursprünglich ein Schwefelsalz enthalten ist von der Formel

$$Na_2 S,\ Tl_2 S_3 + Tl_2 S,\ Tl_2 S_3,$$

d. h. also: *Natriumthalliumsulfür-Thalliumsulfid.*

Wenn bei Aufstellung dieser Formel die Annahme gemacht ist, dafs in der fraglichen Verbindung, obschon die-

selbe sich innerhalb einer sehr schwefelreichen Schmelze bildete, neben Thalliumsulfid die niedrigste Schwefelungsstufe des Thalliums (Tl_2S) enthalten sey, so könnte dies auf den ersten Blick gewagt und befremdlich erscheinen; doch wird diese Annahme von zahlreichen Analogien getragen.

Es zeigen nämlich nicht wenige der in früheren Abhandlungen beschriebenen, auf ganz ähnliche Weise wie das hier in Rede stehende bereiteten Sulfosalze, z. B. die folgenden:

$$K_2S, Ni_2S \mid NiS_2$$
$$K_2S, Pd_2S \mid PdS_2$$
$$K_2S, PtS, PtS, PtS \mid PtS_2$$

ein Verhalten, welches kaum einen Zweifel darüber läfst, dafs dieselben neben dem schwefelreicheren Sulfid (der Sulfosäure) eine niedrigere Schwefelungsstufe desselben Metalles als wesentlichen Bestandtheil enthalten.

Eine weitere Stütze findet die Annahme des Thalliumsulfürs in dem Umstande, dafs die in diesen Abhandlungen besprochenen Sulfosalze ausnahmslos Einfach-Schwefelkalium (oder Einfach-Schwefelnatrium) enthalten, obschon ihre Krystallisation innerhalb eines Mediums erfolgte, das Kalium- oder Natrium-Polysulfuret in grofsem Ueberschufs enthielt.

Allem Anschein nach nimmt nun die Verbindung

$$Na_2S, Tl_2S_3 + Tl_2S, Tl_2S_3$$

beim Zusammentreffen mit Wasser sofort solches auf, sich in ein wasserhaltiges, undeutlich krystallinisches Sulfosalz verwandelnd. Als solches bin ich geneigt, jenes gelbe Pulver anzusprechen, das sich bei der Behandlung der Schmelze mit Wasser alsbald ausscheidet und das sich nach kurzer Berührung mit dem Wasser in ein Haufwerk voluminöser Flocken von durchaus hydratischem Habitus verwandelt.

Die Erscheinungen, um die es sich hier handelt, erinnern lebhaft an diejenigen, die bei der Bildung des unter

No. 4 der zweiten Abhandlung[1]) beschriebenen wasserhaltigen Schwefelnatrium-Schwefeleisens von der Formel

$$\left.\begin{array}{r} Na_2S \\ FeS \end{array}\right\} FeS_2 + 4H_2O$$

beobachtet werden und sie dürfen daher wohl auch mit Recht im Sinne dieser interpretirt werden.

Leider hat sich bei der großen Unbeständigkeit des in Rede stehenden Sulfosalzes weder der Wassergehalt noch die sonstige Zusammensetzung desselben auf dem Wege des direkten Versuches ermitteln lassen. Dasselbe ist in der That von nur sehr ephemerer Existenz: einige Zeit mit Wasser in Berührnng, verliert es (unter Braunfärbung) ziemlich schnell das Schwefelnatrium, am schnellsten dann, wenn zugleich die atmosphärische Luft Zutritt hat, offenbar weil in diesem Falle durch partielle Oxydation des Schwefelnatriums die Zersetzung des Sulfosalzes wesentlich unterstützt und beschleunigt wird.

Die Leichtigkeit, mit der diese Abgabe des Schwefelnatriums erfolgt, erinnert an das Verhalten der Verbindungen des Schwefelkaliums mit Schwefelquecksilber

$$K_2S,\ HgS + 5H_2O \text{ und}$$
$$K_2S,\ 2HgS,$$

die von Brunner[2]) und von mir[3]) untersucht worden sind, nur daſs diese bei der Berührung mit Wasser sofort die ganze Menge des Schwefelkaliums abgeben.

Sind endlich die letzten Spuren von Schwefelnatrium ausgezogen, was übrigens erst nach länger fortgesetztem Auswaschen der Fall zu seyn pflegt, so hinterbleibt ein Rest, dessen Zusammensetzung durch die Formel Tl_2S, $2Tl_2S_3$ oder — in empirischer Form — durch die Zeichen Tl_6S_7 ausgedrückt ist.

Das Siebensechstel-Schwefelthallium läſst sich also — nach seiner Bildung zu urtheilen — auch als eine Verbindung von 1 Mol. Thalliumsulfür mit 2 Mol. Thallium-

1) Diese Annal. Bd. 138, S. 299.
2) Diese Annal. Bd. 15, S. 596.
3) Diese Annal. Bd. 127, S. 483.

sulfid betrachten. — Es verdient an dieser Stelle daran erinnert zu werden, dafs nach den Beobachtungen von Carstanjen[1]) beim Fällen des sogenannten Thallium-sesquichlorides durch Schwefelammonium oder beim Zusammenschmelzen von Thallium mit mehr als 1 und weniger als 3 Aequivalent Schwefel leicht schmelzbare, zu grofsen grauschwarzen, glänzenden, säulenförmigen Krystallen erstarrende Massen erhalten werden, die beide Schwefelungsstufen des Thalliums in variablen Verhältnissen enthalten. Verbindungen dieser Art von constanter, durch eine einfache Formel ausdrückbarer Zusammensetzung scheint Carstanjen indefs nicht beobachtet zu haben.

Das *Siebensechstel-Schwefelthallium* bildet ein dunkelbraunes, amorphes, glanzloses Pulver, das bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft beständig ist. Bei Luftabschlufs erhitzt, schmilzt es Anfangs ohne Schwefel zu verlieren und erstarrt beim Erkalten zu einer undeutlich krystallinischen Masse. Bei stärkerem Erhitzen erfährt es einen Verlust an Schwefel. Ganz ebenso verhält es sich, wenn es im Wasserstoffstrome stark erhitzt wird: es entweicht Schwefel und nur Spuren von Schwefelwasserstoff; zugleich beschlägt die obere Wand der Röhre mit einem dünnen schwarzbraunen Anflug.

Der Verlust an Schwefel, den das Präparat hierbei erleidet, beträgt nahezu $\frac{4}{7}$ vom Gesammtgehalte; der Reductionsrückstand, der sich bei weiterem Erhitzen im Wasserstoffstrome nicht mehr verändert, besitzt die Zusammensetzung und die Eigenschaften des Thalliumsulfürs (Tl_2S).

0,200 Grm. Siebensechstel-Schwefelthallium, so lange im Wasserstoffstrome erhitzt als noch Schwefel entwich, hinterliefsen 0,182 Grm. Rückstand. Nach der Zersetzungsgleichung

$$Tl_6S_7 - S_4 = 3Tl_2S$$

hätte das Gewicht des Rückstandes 0,1823 Grm. betragen sollen.

1) Journ. für prakt. Chem. Bd. 102, S. 76.

Bei der Behandlung mit verdünnten Mineralsäuren wird die Verbindung unter Schwefelwasserstoff-Entwickelung und Ausscheidung von Schwefel zersetzt. Salzsäure, selbst concentrirte, wirkt nur träge ein, weil das entstehende Chlorthallium einen Theil der Substanz einhüllt und dadurch die weitere Zersetzung verlangsamt.

Während beim Zusammenschmelzen von Schwefelmetallen mit Pottasche (oder Soda) und Schwefel in der Regel Sulfosalze entstehen, kommt nur ausnahmsweise der Fall vor, dafs sich das gelöste Schwefelmetall beim Erkalten der Schmelze als solches und dann gewöhnlich im krystallisirten Zustande wieder ausscheidet. So verhält es sich z. B., wie in der siebenten Abhandlung[1]) gezeigt worden ist, mit Schwefelcadmium, wenn es in einem schmelzenden Gemenge von Pottasche und Schwefel gelöst wird, — ebenso mit Schwefelzink, vorausgesetzt, dafs Pottasche und Schwefel nicht in zu grofsem Ueberschufs angewendet werden.

Ein ganz ähnliches Verhalten zeigt das *Schwefelblei*, — ja es ist dasselbe von allen Schwefelmetallen, die ich untersucht habe, das einzige, das beim Zusammenschmelzen mit Schwefel und Alkalicarbonaten unter keinen Umständen Sulfosalze bildet: wie man auch bei der Bereitung der Schmelze die Verhältnisse wählen mag, gleichviel ob man dabei Pottasche oder Soda anwendet, — es krystallisirt beim Erkalten der Schmelze stets Schwefelblei als solches heraus.

Da dasselbe, auf diese Weise erhalten, einige Eigenthümlichkeiten zeigt, so soll hier etwas näher darauf eingegangen werden.

36. Krystallisirtes Schwefelblei.

Behufs der Darstellung dieses Präparates verfährt man am besten folgendermaafsen: Man schmilzt ein inniges Gemenge von 1 Theil trockenem (durch Schwefelwasser-

1) Diese Annal. Bd. 149, S. 381.

stoff gefälltem) Schwefelblei, 6 Theilen reiner trockener Pottasche und 6 Theilen Schwefel in einem etwas geräumigen, bedeckten Porzellantiegel über der Gebläselampe so lange, bis die Masse bei heller Rothgluth in gleichmäfsigen Flufs gekommen ist, was bei einer Tiegelbeschickung von 25 bis 30 Grm. des Gemenges schon nach 5 bis 10 Minuten der Fall zu seyn pflegt. Die erkaltete Schmelze wird darauf bis zur Erschöpfung mit Wasser behandelt, wobei das Schwefelblei als ein bläulichgraues, vollkommen gleichmäfsiges Krystallpulver ungelöst hinterbleibt.

Bei der Analyse des so bereiteten und bei 100° getrockneten Präparates wurden folgende Resultate erhalten:

1) 0,271 Grm., durch heifse Salzsäure zersetzt, gaben beim Glühen des aus der stark verdünnten Lösung gefällten oxalsauren Bleioxyds 0,252 Grm. Bleioxyd. Die vom oxalsauren Blei abfiltrirte Flüssigkeit zeigte sich von Kali völlig frei.

2) 0,121 Grm., durch Schmelzen mit Salpeter und Soda zersetzt, gaben 0,120 Grm. schwefelsauren Baryt.

Auch wenn man Schwefelblei anstatt mit Pottasche mit Soda und Schwefel in den oben angegebenen Verhältnissen zusammenschmilzt, erhält man Krystalle von derselben Zusammensetzung; doch pflegen dieselben etwas kleiner auszufallen, als bei Anwendung von Pottasche.

3) 0,280 Grm. eines so bereiteten Präparates, durch Schmelzen mit Salpeter und Soda zersetzt, gaben 0,278 Grm. schwefelsauren Baryt und 0,259 Grm. Bleioxyd.

Diese analytischen Data befinden sich mit der Formel des Schwefelbleis in genügender Uebereinstimmung, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

	Berechnet:		Gefunden: I.	II.	III.
Pb = 207,5	86,64	Proc.	86,35	—	85,90
S = 32,0	13,36	„	—	13,6	13,63
239,5	100,00.				

Die Eigenschaften des nach diesem Verfahren bereiteten Schwefelbleis sind folgende:

Blaugraues Krystallpulver, unter dem Mikroskop bei mäfsiger Vergröfserung sich als ein vollkommen gleichmäfsiges Aggregat glänzender, dünnsäulenförmiger Krystalle darstellend, die — wie bei stärkerer Vergröfserung erkannt wird — durch Aneinanderreihung kleiner regulärer Octaëder entstanden sind.

Das specifische Gewicht dieses Krystallpulvers wurde im Mittel aus mehreren Versuchen zu 6,77 gefunden; dasselbe ist also erheblich geringer als das des Bleiglanzes, das bekanntlich 7,3 bis 7,6 beträgt.

Das sonstige Verhalten der künstlichen Verbindung stimmt mit dem des natürlichen Schwefelbleis vollkommen überein. Sie wird von heifser Salzsäure unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff und Bildung von Chlorblei leicht und vollständig zersetzt. Auch Salpetersäure wirkt in der Wärme kräftig zersetzend darauf ein unter Abscheidung von Schwefel und schwefelsaurem Bleioxyd. — Bei heftigem Glühen im Wasserstoffstrome wird die Verbindung unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff zwar langsam, aber vollständig zu metallischem Blei reducirt.

Der Verfasser hat die Sulfosalze, von denen in diesen Abhandlungen die Rede war, in der Reihenfolge beschrieben, in der sie gerade bearbeitet wurden, ohne auf Aehnlichkeit und Zusammengehörigkeit der einzelnen Rücksicht zu nehmen; es erscheint daher geboten, dieselben jetzt in übersichtlicher Anordnung zusammenzustellen. Läfst man dabei als Eintheilungsprincip die analoge Zusammensetzung gelten, so können die folgenden sechs Gruppen unterschieden werden.

Erste Gruppe.	Zweite Gruppe.	Dritte Gruppe.
Na_2S, PdS_2	$K_2S, 2HgS$ [1]	$K_2S, 3ZnS$
	$Na_2S, 2MnS$	$Na_2S, 3ZnS$
		$Na_2S, 3CdS$.

Vierte Gruppe.	Fünfte Gruppe.
K_2S, Fe_2S_3	$Na_2S, FeS \mid FeS_2$
Ag_2S, Fe_2S_3	$K_2S, Ni_2S \mid NiS_2$
K_2S, Tl_2S_3	$K_2S, Pd_2S \mid PdS_2$
K_2S, Jn_2S_3	$Ag_2S, Pd_2S \mid PdS_2$
Na_2S, Jn_2S_3	
K_2S, Bi_2S_3	
Na_2S, Bi_2S_3	

Sechste Gruppe.

$K_2S, \; Cu_2S, \; Cu_2S, \; Cu_2S \mid Cu_2S_2$

$Na_2S, \; Na_2S, \; Cu_2S, \; Cu_2S \mid Cu_2S_2$

$K_2S, \; PtS, \; PtS, \; PtS \mid SnS_2$

$Na_2S, \; PtS, \; PtS, \; PtS \mid SnS_2$

$K_2S, \; PtS, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$Na_2S, \; PtS, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$Na_2S, \; Na_2S, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$Ag_2S, \; Ag_2S, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$Tl_2S, \; Tl_2S, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$CuS, \; CuS, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$PbS, \; PbS, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

$PtS, \; PtS, \; PtS, \; PtS \mid SnS_2$

$PtS, \; PtS, \; PtS, \; PtS \mid PtS_2$

Nur die beiden unter 8 und 9 der zweiten Abandlung[2]) beschriebenen Sulfosalze von eigenthümlicher Constitution haben sich in diese Zusammenstellung nicht einreihen lassen.

1) Es wird nicht unpassend erscheinen, wenn der Verfasser dies schon vor längerer Zeit von ihm beobachtete und (l. c.) beschriebene Sulfosalz an dieser Stelle in den Kreis der Betrachtung aufnimmt.

2) Diese Annal. Bd. 138, S. 299.

Das in der ersten Gruppe alleinstehende Natrium-Sulfopalladat (Na_2S, PdS_2) unterscheidet sich nicht nur hinsichtlich seiner Constitution, sondern auch durch sein Verhalten von den sämmtlichen, hier besprochenen Sulfosalzen: es ist von allen das einzige, das sich selbst in kaltem Wasser und zwar ohne Rückstand auflöst. — Alle übrigen sind als solche in Wasser unlöslich, doch geben einige bei der Berührung mit Wasser das Alkalisulfuret mehr oder weniger leicht ab; bei der Verbindung K_2S, $2HgS$ erfolgt diese Abgabe mit der gröſsten Schnelligkeit, langsamer bei den Verbindungen Na_2S, $2MnS$; Na_2S, $3ZnS$ und Na_2S, $3CdS$.

Wie gegen Wasser, so verhalten sich diese Sulfosalze auch gegen den atmosphärischen Sauerstoff sehr verschieden, ja selbst die Glieder einer und derselben Gruppe zeigen in dieser Beziehung häufig die gröſsten Verschiedenheiten. Im Allgemeinen stehen die Schwefelnatrium-haltigen den Schwefelkalium-haltigen Salzen an Beständigkeit erheblich nach.

Bezüglich des Verhaltens der einzelnen Salze gegen die atmosphärische Luft verweise ich auf das früher darüber Mitgetheilte. Doch darf nicht unerwähnt bleiben, daſs einige, die ich früher — gestützt auf die Beobachtung von mehreren Wochen — als luftbeständig bezeichnet habe, so namentlich die folgenden

$$K_2S,\ Fe_2S_3$$
$$K_2S,\ Tl_2S_3$$
$$K_2S,\ Cu_2S,\ Cu_2S,\ Cu_2S \mid Cu_2S_3$$
$$Na_2S,\ Na_2S,\ Cu_2S,\ Cu_2S \mid Cu_2S_3$$

sich nach längerer (zweijähriger) Aufbewahrung in nicht ganz luftdicht verschlossenen Gefäſsen etwas verändert zeigen: die Krystallchen sind oberflächlich erblindet und sie geben bei der Behandlung mit Wasser einen alkalisch reagirenden Auszug, der unterschwefligsaures neben etwas kohlensaurem Alkali enthält.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergiebt sich nun als wesentliches Resultat dies: daſs die meisten schweren Metallsulfurete — und zwar nicht nur solche, die wie Zweifach-Schwefelzinn, Zweifach-Schwefelplatin und Zweifach-Schwefelpalladium[1]) den Charakter wahrer Sulfosäuren an sich tragen, sondern auch viele von denen, die man als positive Schwefelmetalle oder als Sulfobasen anzusprechen gewohnt ist — sich in einem schmelzenden Gemenge von Pottasche (oder Soda) und Schwefel in der Rothglühhitze in erheblicher Menge auflösen und entweder als solche — (der seltenere Fall) — oder verbunden mit dem Alkalisulfuret unter der Form von Schwefelsalzen — (der bei Weitem häufigere Fall) — aus der erkaltenden Schmelze herauskrystallisiren.

So verhalten sich namentlich die Sulfurete von Mangan, Eisen, Nickel, Kobalt, Zink, Indium, Cadmium, Kupfer, Wismuth, Thallium und Blei.

Dabei zeigt sich der bemerkenswerthe Umstand, daſs für ein und dasselbe schwere Metall gewöhnlich Sulfosalze von wesentlich verschiedener Constitution erhalten werden, je nachdem die Ausscheidung derselben aus einer Schwefelkalium- oder einer Schwefelnatrium-haltigen Schmelze erfolgt. Zum Beweise dafür möge die folgende paarweise Zusammenstellung dienen:

$$\text{bei Kupfer:} \left\{ \begin{array}{l} K_2S,\ Cu_2S,\ Cu_2S,\ Cu_2S \mid Cu_2S_2 \\ Na_2S,\ Na_2S,\ Cu_2S,\ Cu_2S \mid Cu_2S_2 \end{array} \right.$$

$$\text{bei Palladium:} \left\{ \begin{array}{l} K_2S,\ Pd_2S \mid PdS_2 \\ Na_2S,\ PdS_2 \end{array} \right.$$

$$\text{bei Platin:} \left\{ \begin{array}{l} K_2S,\ PtS,\ PtS,\ PtS \mid PtS_2 \\ Na_2S,\ Na_2S,\ PtS,\ PtS \mid PtS_2 \end{array} \right.$$

1) Das Zweifach-Schwefelpalladium, das bisher ganz unbekannt war, verhält sich in der That, wie in No. 21 der fünften Abhandlung (diese Annal. Bd. 141, S. 519) gezeigt worden ist, nach Art einer wahren Sulfosäure und ahmt daher in dieser Beziehung das Verhalten des Zweifach-Schwefelplatins treu nach.

Nur bei Wismuth und Zink entstehen in beiden Fällen Salze von analoger Constitution, nämlich diese:

$$\begin{matrix} K_2S,\ Bi_2S_3 \\ Na_2S,\ Bi_2S_3 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} K_2S,\ 3\,ZnS \\ Na_2S,\ 3\,ZnS. \end{matrix}$$

Aus der Löslichkeit der oben genannten, gewöhnlich als Sulfobasen fungirenden Sulfurete in schmelzendem Schwefelkalium (oder Schwefelnatrium) und aus der Neigung derselben, in die Form von Schwefelsalzen einzutreten, erklären sich nun ungezwungen manche Erscheinungen, deren Deutung bisher eine gewisse Unsicherheit und Schwierigkeit in sich schlofs. Dafs z. B. bei der Reinigung des rohen Antimons durch Zusammenschmelzen desselben mit Schwefelantimon und Soda nicht nur Arsenik, sondern auch die gewöhnlich vorhandenen kleineren Mengen von Schwefelblei, Schwefelkupfer und Schwefeleisen entfernt werden, kann nicht mehr befremden: sie gehen entweder als solche (Schwefelblei) oder unter der Form von Sulfosalzen in die alkalische Schmelze über. — Bei der Reinigung des rohen Wismuths durch Zusammenschmelzen desselben mit Soda und Schwefel dürften ähnliche Verhältnisse obwalten.

Vielleicht erscheint selbst die Annahme nicht ungerechtfertigt, dafs bei manchen der im Grofsen ausgeführten metallurgischen Prozesse die Beseitigung kleiner Mengen fremder Metalle auf die Bildung von Sulfosalzen zurückzuführen sey, insofern in den schmelzenden Massen der Beschickung nicht selten Gelegenheit geboten seyn dürfte zur Entstehung von Alkalisulfureten, die ihrerseits kleinere Mengen schwerer Metallsulfurete aufzulösen vermögen.

Weiter aber ergiebt sich daraus, dafs zahlreiche Sulfurete, die gewöhnlich die Rolle von Sulfobasen spielen, unter Umständen nachweislich als schwache Sulfosäuren zu fungiren im Stande sind, die Nothwendigkeit, den Begriff „Sulfosalz" etwas anders und zwar weiter zu fassen, als bisher gewöhnlich geschehen ist. Anstatt die Sulfosalze Verbindungen von Sulfobasen mit Sulfosäuren zu

nennen, wird man sie richtiger und treffender bezeichnen können als

Verbindungen zweier (oder mehrerer) Sulfurete, deren Radicale nicht die gleiche Werthigkeit besitzen.

Nehmen mehr als zwei Sulfurete an der Bildung eines Sulfosalzes Theil, so ist es nicht nothwendig, dafs alle darin enthaltenen Radicale von verschiedener Werthigkeit sind, — sie können alle bis auf eins gleichwerthig seyn.

Zur Unterscheidung von den wahren Sulfosalzen werden die Verbindungen zweier Sulfurete, deren Radicale hinsichtlich ihrer Werthigkeit keine Differenz zeigen, passend als *Doppelsulfurete* bezeichnet, z. B. Marmatit $= FeS, 3ZnS$ oder Eisennickelkies $= 2FeS, NiS$, ebenso die von Berzelius unter den Schwefelsalzen aufgeführten Verbindungen $2Bi_2S_3, 3As_2S_3$ und $2Fe_2S_3, 3As_2S_3$.

Auch für die Verbindungen zweier Schwefelungsstufen eines und desselben Metalles möchte sich die Bezeichnung Doppelsulfurete empfehlen, umsomehr als diese Verbindungen schon in ihrem äufsern Habitus weit mehr den Charakter von Schwefelmetallen als von Schwefelsalzen an sich tragen.

Berlin, im August 1874.

X. *Ueber ein neues Ocular;*
von Dr. Hugo Krüfs.

In der Geschichte der optischen Instrumente ist eine Periode zu verzeichnen, in welcher alle Verbesserungen derselben sich auf das Ocular erstreckten; dieser Zeitraum begann, als die störenden Einwirkungen der sphärischen und chromatischen Abberration der Objective immer fühlbarer wurden und man es aufgab, die ersteren durch Schleifen von parabolischen Flächen zu heben. Als dann

nach **Newton**'s grofser Entdeckung die Möglichkeit der Hebung der Farbenabweichung der optischen Systeme erkannt wurde, verliefs man das Ocular und verwandte alle Mühe auf die Vervollkommung der Objective; den Ocularen wurde seit jener Zeit nur wenig Beachtung geschenkt; man benutzt noch jetzt fast ausschliefslich die **Huyghens**'sche oder **Ramsden**'sche Construction des Oculars. — Von der einfachen **Kepler**'schen Zusammensetzung des astronomischen Fernrohrs ausgehend, welches aus einem Objectiv und einer Ocularlinse bestand, wurden die Fernrohre meistens dadurch verbessert, dafs man die Bestandtheile derselben immer complicirter machte. Ein anderer Weg zur Förderung der Wissenschaft ist aber der, sich zu bemühen, durch einfachere Mittel dasselbe zu erreichen, wie bisher durch die zusammengesetzten; man soll dabei zuerst suchen, die jetzigen Apparate durch einfachere zu ersetzen, dann wird man leicht durch gröfseren Aufwand von Mitteln noch mehr erringen. Der Verfasser dieses beschäftigte sich nun mit der Frage, ob es nunmehr, nachdem eine ausgebildete Theorie und eine sehr vollkommene Ausführung der optischen Apparate zu Gebote stehen, möglich sey, auf die ursprüngliche einfache Anordnung des Fernrohrs zurückzugehen, also das Ocular desselben aus *einer* Linse so zu construiren, dafs es in den meisten Beziehungen dasselbe leistet, wie die jetzt gebräuchlichen zusammengesetzten Oculare.

Es ist von vornherein ersichtlich, dafs solches keineswegs durch eine einfache Linse zu erreichen ist, da diese unmöglich den Bedingungen des Achromatismus und Aplanatismus genügen kann; ebenso dafs auch eine zweifache Linse zu wenig verfügbare Elemente besitzt, um mit ihnen den Anforderungen, welche man an ein gutes Ocular stellen darf, genügen zu können. Deshalb verfiel der Verfasser auf die Zusammensetzung des Oculars aus drei unter einander verkitteten Einzellinsen. Wählt man eine Construction ähnlich derjenigen der bekannten **Steinheil**'schen Lupen, welche aus einer biconvexen Crown- um-

schlossen durch zwei Flintglaslinsen bestehen, wie sie den Instrumenten zum Photographiren des Venusdurchganges als Vergröfserungsapparate von Steinheil beigegeben sind, so erhält man ein Ocular, welches ein geringes Gesichtsfeld gestattet und nur für kleine Oeffnungswinkel gut ist. Der Verfasser dieses ging von einer früher von ihm berechneten achromatischen Doppellupe aus. Er construirte zu einer biconvexen Flintglaslinse, zwei Crownglaslinsen, die in jede der Flächen der ersteren eingekittet werden sollten. — Zur Veranschaulichung, nach welchen Grundsätzen das Ocular construirt wurde, diene die schematische Zeichnung in Fig. 8, Taf. IV, in welcher das Ocular durch die biconvexe Linse *LL* dargestellt ist. Es wurde eine Brennweite *HF* des Oculars von 8‴ angestrebt und der Farben- und Kugelgestaltfehler für die am Rande eines Büschels, welches parallel der Axe *AA* auf das Ocular fällt und einen Durchmesser von $\frac{1}{12}$ der Brennweite hat, liegenden Strahlen *ab* möglichst zu heben gesucht. Die trigonometrische Verfolgung dieses von der Seite des Augenortes *O* auf das Ocular treffenden Büschels ergab, dafs zur Hebung des Farbenfehlers die dem Objectiv nächste Fläche des Systems sehr stark gekrümmt werden mufste. Zur Vermeidung dieses Uebelstandes wurde versucht, die dritte Linse aus einem leichten Flintglase herzustellen. Als versuchsweise das System umgekehrt und die flachere Seite dem Objective zugewendet wurde, zeigte sich ein bedeutendes Wachsen des Farbenfehlers, während der Kugelgestaltfehler seine bisherige Gröfse beibehielt. Aufserdem lag der Bildpunkt fast unmittelbar an der Linse, weshalb diese geringere Dicke gegeben werden mufste. Da der Farbenfehler nicht compensirt war, so konnte er dadurch gehoben werden, dafs die Leichtflintlinse wieder durch eine Crownglaslinse ersetzt wurde. Das so erhaltene System hatte folgende Dimensionen:

$$
o = 0''',84 \quad
\begin{array}{l}
r_1 = +\ 5''' \\
r_2 = -\ 20'''
\end{array}
\Big\}\ \text{Crown};\ d_1 = 4'''
\qquad
\begin{array}{l}
r_3 = -\ 20''' \\
r_4 = +\ 5'''
\end{array}
\Big\}\ \text{Flint};\ d_2 = 1'''
\qquad
\begin{array}{l}
r_5 = +\ 5''' \\
r_6 = -\ 7''',5
\end{array}
\Big\}\ \text{Crown};\ d_3 = 4'''
$$

wobei r_1, r_2 . . . . r_6 die Radien der Flächen der Linsen bedeuten, wie sie (vom Augenorte aus) aufeinander folgen), d_1, d_2 und d_3 die Dicken derselben und o ($= b\,b$) der Durchmesser des Lichtbüschels ist. Hierbei sind die Radien derjenigen Flächen als positiv angenommen, welche ihre Convexität dem Augenorte zuwenden.

Die Brennweite HF des Systems ist $9''',7$ und die Vereinigungsweiten PF für je einen gelben und einen violetten Strahl (g und v), welche das Ocular in der Axe und am Rande des Büschels (A und R) treffen, fanden sich mit

gA	vA	gR	vR
$4''',7498$	$4''',7476$	$4''',7270$	$4''',7242$.

Hieraus ergiebt sich der Farbenfehler:

für die in der Axe auffallenden Strahlen $0''',0022$ nicht compensirt,

für die am Rande auffallenden Strahlen $0''',0028$ nicht compensirt,

und der Kugelgestaltfehler der am Rande des Büschels liegenden Strahlen:

für gelbe Strahlen $0''',0228$ nicht compensirt
- violette - $0''',0234$ - -

Bestimmt man die Lage der Bildebene nach den Principien, wie sie der Verf. dieses in seiner Abhandlung über Objectiv-Constructionen[1]) auseinander setzte, so findet sich die Entfernung derselben vom Scheitel der letzten Fläche mit $4''',7230$ und es ergeben sich demnach die Bilddurchmesser in dieser Ebene:

für gelbe Strahlen . . . . . $0''',00025$
- violette - . . . . . $0''',00010$.

1) Vergleichung einiger Objectiv-Constructionen: Inaugural-Dissertation von Hugo Krüfs. München 1873. 8. S. 7.

Nun mufste untersucht werden, ob dieses System einer weiteren Bedingung genüge. Es müssen nämlich Lichtstrahlen, die von einem unendlich weit entfernten Punkte auf das Objectiv des Fernrohrs treffen und durch dasselbe in einen Punkt der Brennebene des Oculars vereinigt werden, durch das Ocular so gebrochen werden, dass sie untereinander parallel in's Auge gelangen, gleichviel ob dieser unendlich entfernte Punkt in der optischen Axe oder ausserhalb derselben liegt. Der Verf. nahm zu dieser Untersuchung ein ganz vollkommenes Objectiv von 3′ Brennweite und dem entsprechend 3″ Oeffnung an, sowie ferner dem Durchmesser $F_1 F_2$ des von demselben entworfenen Bildes zu 4‴. Die Strahlen, welche von einem um 16 Minuten von der Axe entfernten, in der Unendlichkeit liegenden Punkte das Objectiv treffen, haben ihre Vereinigung am Rande (F_1) des Bildes. Der Verf. berechnete nun den Weg von drei mit der Axe in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Büschels, des Hauptstrahls $F_1 c$ (Hptstr.), des obersten $F_1 d$ (Obstr.) und des untersten Strahles $F_1 f$ (Untstr.); der erstere zielt also vom Hauptpunkte des Objectivs, der zweite und dritte vom oberen und unteren Rande derselben auf einen 2‴ über der Axe in der Bildebene des Oculars liegenden Punkt F_1. Wenn das Ocular ganz vollkommen wäre, so müfsten diese drei Strahlen unter einander parallel aus demselben austreten; es ergaben sich aber folgende Neigungen derselben gegen die Axe:

Hptstr.	Obstr.	Untstr.
12° 52′ 48″	12° 20′ 2″	13° 43′ 37″,

so dafs also ein Winkelfehler von fast einem Grad vorhanden war.

Die nächste Aufgabe war nun, für ein möglichst grofses Gesichtsfeld diesen Fehler möglichst klein zu machen. Hierzu waren zwei Mittel vorhanden, wenn man zugleich die Brennweite nicht viel verändern wollte, nämlich eine andere Vertheilung der Brechungen zwischen der ersten und letzten und eine andere Vertheilung zwischen der

zweiten und dritten Fläche. Es wurde hierbei sogar nothwendig, den Flächen, deren Radien mit r_2 und r_3 bezeichnet wurden (welche Gröfsen vorher negativ waren), eine entgegengesetzte Krümmung zu geben und aufserdem die erste und letzte Fläche fast gleich zu krümmen. Der Strahlenbüschel parallel zur Axe braucht bei diesen Berichtigungen fast gar nicht berücksichtigt zu werden, denn der Kugelgestaltfehler blieb derselbe, in Bezug auf Achromatismus wurde das System durch die vorgenommenen Veränderungen immer besser; es wurde nur, um das Ocular besser stabil achromatisch zu machen, die Dicke der Linse verringert. Es zeigte sich jedoch, dafs der Hebung jenes Fehlers eine Gränze gesetzt ist, durch die Bedingung der Erhaltung des Gesichtsfeldes, so dafs sich folgender günstigster Fall herausstellte:

$$0 = 0''',68 \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} r_1 = + \;\; 5''',27 \\ r_2 = + 10''',00 \end{matrix}\right\} \text{Crown; } d_1 = 2''' \\ \left.\begin{matrix} r_3 = + 10''',00 \\ r_4 = + \;\; 2''',9 \end{matrix}\right\} \text{Flint; } d_2 = 1''' \\ \left.\begin{matrix} r_5 = + \;\; 2''',9 \\ r_6 = - \;\; 5''',73 \end{matrix}\right\} \text{Crown; } d_3 = 3'''. \end{matrix}$$

Für den Strahlenbüschel parallel zur Axe ergaben sich mittelst Durchrechnung des Oculars folgende Vereinigungsweiten:

gA	vA	gR	vR
5''',6188	5''',6175	5''',6034	5''',6026

woraus man findet:

den Farbenfehler

für die in der Axe auffallenden Strahlen 0''',0013 nicht compensirt

für die am Rande auffallenden Strahlen 0''',0008 nicht compensirt,

den Kugelgestaltfehler der am Rande des Büschels liegenden Strahlen:

für gelbe Strahlen 0''',0154 nicht compensirt

- violette - 0''',0149 - -

Die Bildebene wurde in der Entfernung von 5''',6055 von der letzten Fläche angenommen, woraus die Bilddurchmesser folgen:

für gelbe Strahlen . . . 0''',00017
- violette - . . . 0''',00024.

Die Brennweiten für die einzelnen Strahlen sind:

gA	*vA*	*gR*	*vR*
8''',2086	8''',2031	8''',1903	8''',1856,

also der Abstand des Hauptpunktes von der letzten Fläche für jene Strahlen:

gA	*vA*	*gR*	*vR*
2''',5898	2''',5856	2''',5869	2''',5830.

Man sieht aus obigen Zahlen, daſs in Bezug auf Kugelgestalt- und Farbenfehler für den der Axe parallelen Büschel dieses System besser ist, als die erste Anordnung der Brechungen; auſserdem ist es aber stabil achromatisch, d. h. zwei an demselben Punkte des Oculars eingetretene verschiedenfarbige Strahlen zielen nach der Brechung durch dasselbe nicht nur auf denselben Punkt der Axe, sondern sie verlassen das System auch an dem gleichen Punkte. Ferner läſst das Zusammenfallen der Hauptpunkte für die gelben und die violetten Strahlen auf eine gleiche Vergröſserung der verschiedenfarbigen Bilder schlieſsen und das Zusammenfallen der Hauptpunkte für die Axen- und die Randstrahlen auf das Fehlen von Verzerrung.

Die Verfolgung der drei oben schon näher bezeichneten vom Objective herkommenden Strahlen auſser der Axe in der Axenebene ergaben folgende Winkel, unter denen sie die Axe schneiden:

Hptstr.	Obstr.	Untstr.
14° 4' 36'''	13° 59' 7''	14° 0' 45''.

Auſserdem wurde noch der Weg eines anderen Strahles jenes Lichtbüschels berechnet, welcher nicht mit der Axe in einer Ebene liegt und das Objectiv an dem Punkte seines Randes verläſst, der mitten zwischen dem Abgangspunkte des oberen und unteren Strahles liegt; die Nei-

gung dieses Strahles gegen die Axe ist nach der Brechung durch das Ocular 14° 1′ 53‴. Die gröfste Differenz unter diesen Werthen ist demnach nur 0° 5′ 29″, während sie zuvor 0° 50′ 40″ betrug. Bei einem Gesichtsfelde von 28° zeigt also das Ocular vollkommen deutlich. Bei nur 12° Gesichtsfeld bilden die drei Strahlen folgende Winkel mit der Axe:

Hptstr.	Obstr.	Untstr.
5° 57′ 51″	5° 56′ 39″	6° 2′ 29″.

Hierbei ist also der gröfste Fehler 0° 5′ 50″; man könnte ihn bis auf 1′ herabbringen, doch ist dieses nicht mit derselben Vertheilung der Brechungen zu erreichen, bei welcher der Fehler ein Minimum ist für 28° Gesichtsfeld.

Dann wurde noch eine Untersuchung angestellt darüber, wie sich das Ocular gegen sehr grofse Lichtbüschel verhalten würde; es wurden mit der Axe parallele Strahlen verfolgt, die um $\frac{1}{12}$ und um $\frac{1}{6}$ der Brennweite von der Axe entfernt sind; die sich ergebenden Vereinigungs- und Brennweiten sind:

0 = 1‴,368		0 = 2‴,736	
g	*v*	*g*	*v*
5‴,5493	5‴,5539	5‴,3620	5‴,3625
8‴,1315	8‴,1283	7‴,9066	7‴,9051

Während der Farbenfehler immer sehr klein bleibt, wird der Kugelgestaltfehler mit Wachsen des Durchmessers des Lichtbüschels schon gröfser, doch ist er noch immer nicht beträchtlich, da die Bilddurchmesser (gelbe Strahlen) in den beiden letzten Fällen nur 0‴,0015 und 0‴,0114 betragen.

Nach obigen theoretischen Untersuchungen war der Verf. berechtigt zu erwarten, dafs das Ocular ein äufserst farbenreines, deutliches und vor Allem reflexfreies Bild geben und dafs ca. 30° Gesichtsfeld benutzbar seyn würde. Hr. Dr. Steinheil in München war so freundlich, das Ocular in seiner Werkstätte ausführen zu lassen und gestattete, die Wirkung desselben an einigen sehr guten, von ihm gefertigten Objectiven zu prüfen. Die Gröfse

der Gesichtsfeldblendung des Oculars betrug 4''',5, was einem Gesichtsfelde von 31—32° entspricht. Die Combination des Oculars mit einem Fernrohrobjectiv von 19½ Zoll Aequivalent-Brennweite und 24 Linien Oeffnung ergab, daſs das Ocular ein achromatisches Bild liefere, welches ganz eben und nicht verzerrt erschien. Um zu prüfen, ob das System auch groſse Helligkeiten ertragen könne, wurde es mit einem Photographenapparat in Verbindung gebracht, welcher einen Lichtbüschel von 2⅔''' (= ⅓ der Brennweite des Oculars) Durchmesser lieferte, und auch hier zeigte sich ein bis zum Rande ebenes, sehr deutliches und farbenreines Bild. — Bei der Anwendung der Linse als einfache Lupe trat eine Eigenschaft des verwendeten Flintglases zu Tage, welche bei der Benutzung desselben als astronomisches Ocular wenig bemerkbar ist, nämlich die gelbliche Färbung dieser Glasart, welche jedoch nicht so stark ist, um erheblich störend einzuwirken.

Die Prüfung constatirte somit, daſs diese Construction des Fernrohroculars als astronomisches Ocular überall da verwendet werden kann, wo kein sehr groſses Gesichtsfeld nöthig ist. Die Präcision der Bildpunkte auſser der Axe ist zwar keine äuſserst groſse, aber sehr gleichmäſsig über die äuſseren Theile des Gesichtsfeldes vertheilt. Vor Allem erträgt das Ocular aber sehr groſse Oeffnungswinkel, was es vor den meisten jetzt gewöhnlich angewandten complicirten Ocularen voraus hat. Durch die genügende Entfernung der Linse von dem durch das Objectiv entworfenen Bilde, sowie durch das Fehlen der störenden Reflexe, welche bei der Combination mehrerer Linsen in groſser Anzahl entstehen, eignet es sich aber besonders dazu, als Micrometer-Ocular angewandt zu werden.

In Obigem ist der Gang der Rechnung, welche zu der besten Construction des Oculars führte, ziemlich ausführlich behandelt worden, hauptsächlich um an diesem Beispiele zu zeigen, wie es nothwendig ist, jeden besonderen

Fall für sich zu berechnen, wenn man etwas Vollkommenes leisten will. Es genügt nicht, nach den analytischen Formen sich Gleichungen zu entwickeln, welche die Bedingungen enthalten, denen das zu construirende System genügen soll, und dann aus diesen Gleichungen die Elemente desselben zu berechnen. Man mufs durch langsame trigonometrische Rechnung zuerst wenigen Bedingungen zu genügen suchen und dann mit Festhaltung der früheren weitere Bedingungen einführen. Da es nicht nothwendig wie auch nicht möglich ist, die Fehler der optischen Instrumente ganz verschwinden zu lassen, sondern da nur verlangt wird, dafs sie eine gewisse Gränze nicht überschreiten, so ist es durch diese Methode der Rechnung oft möglich, durch theilweise Nichterfüllung einer Bedingung zugleich einer anderen nahe genug zu genügen; dieses kann man nie, wenn man sich an die unbiegsamen analytischen Formen hält, die aufserdem bei der jetzt möglichen sehr genauen Ausführung der optischen Apparate viel zu ungenaue Resultate liefern.

Hamburg, im November 1874.

XI. *Ueber die Dissociation der wasserhaltigen Salze. Nachträgliche Bemerkung von Gustav Wiedemann.*

Im Jubelband dieser Annalen S. 474 habe ich eine Abhandlung über die Dissociation der wasserhaltigen Salze veröffentlicht, deren Resultate zum Theil mit denen einer Beobachtungsreihe des Hrn. Debray (*Compt rend. T.* LXVI, *p.* 194, 1868) übereinstimmen. Obgleich die Arbeit des Hrn. Debray daselbst zunächst in einer Anmerkung citirt und auch bei dem wesentlichsten der gemein-

samen Resultate nochmals im Text erwähnt ist, glaubt Hr. Debray (*Compt. rend.* 19. October 1874) zu meinem Bedauern dennoch, dafs die Priorität seiner Leistungen von mir nicht genügend hervorgehoben sey.

Nichts liegt mir ferner, als die Verdienste des Hrn. Debray irgend wie verdunkeln zu wollen; auch lege ich für meine Person nicht allzu viel Werth auf die Priorität der von mir publicirten Arbeiten; im vorliegenden Fall glaube ich indefs doch auf die Aeufserungen des Hrn. Debray hin zur Feststellung des Thatbestandes Folgendes erwähnen zu sollen:

1) Die Resultate meiner Arbeit wurden *vollständig* schon im Jahre 1864 dem wissenschaftlichen Verein in Braunschweig und sodann unter Beifügung der Beobachtungsreihen, welche längere Erwärmungszeiten erforderten, nochmals am *11. Juni 1866* dem naturwissenschaftlichen Verein in Carlsruhe mitgetheilt. (Vergl. den vom Secretär dieses Vereins verfertigten Auszug in dem Protocoll der betreffenden Sitzung in den Verhandlungen des Vereins. Drittes Heft S. 8.) Die schon damals *fertig ausgearbeitete* Abhandlung ist mit unbedeutenden, die Resultate nicht berührenden, rein redactionellen Aenderungen unter Beifügung der die Arbeit des Hrn. Debray vom Jahre *1868* betreffenden Citate im Jubelband veröffentlicht. Die Verzögerung der Publication ist allein dadurch begründet, dafs ich, freilich bisher vergeblich, noch fernere Anhaltspunkte für eine vollständige Theorie der Dissociation zu gewinnen hoffte.

2) Die von mir angewendete Methode ist nach Hrn. Debray complicirter als die seine. Ich habe indefs nicht auf die von mir benutzten Vorsichtsmaafsregeln verzichten zu können geglaubt. Dieselben sind, wie ich mich durch wiederholte Versuche überzeugte, zur Erlangung exacter und namentlich auch zu weiteren Berechnungen ganz geeigneter, aus dem Einflufs der den Krystallen anhängenden Luft und des eingeschlossenen Was-

sers möglichst unabhängige Resultate unbedingt erforderlich. In Folge des zuletzt erwähnten Umstandes ist es bei manchen Hydraten[1]) überhaupt fast unmöglich, übereinstimmende Beobachtungsreihen zu erhalten.

Leipzig, 28. November 1874.

XII. *Bemerkungen die Theorie der Elektricität betreffend; von E. Edlund.*

In Hrn. Wiedemann's Werk: „Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus"[2]) wird hinsichtlich der von mir aufgestellten Theorie der elektrischen Erscheinungen geäußert: „Es ist auffallend, wie das doch jedenfalls gegen die körperlichen Massen äußerst dünne Medium des Aethers bei einer Veränderung seiner Dichtigkeit so bedeutende Aenderungen seiner Abstoßung in weite Entfernungen zeigen soll, wie sie die elektrischen

1) Zu letzteren gehören u. A. die Krystalle des schwefelsauren Kupferoxyd-Kali's, des Alauns und des neuerdings von Alex. Neumann (Chem. Ber. 1874. Dec. 14, S. 1573) untersuchten Kupfervitriols, in welchen schon durch die Trübung und lamelläre Structur häufig Ungleichheiten zu erkennen sind. Bei gleichzeitiger Untersuchung scheinbar ganz klarer Stücke des letzteren Salzes erhält man oft ganz abweichende Resultate. Treten bei längerem Erwärmen oder bei wiederholtem Temperaturwechsel durch Zerspringen der Oberfläche der Krystalle die inneren (zuweilen noch feuchten) Theile an die Oberfläche, so können sich dadurch fortgesetzte Aenderungen der Spannkraft zeigen. Bei den von mir benutzten Krystallen ergaben sich, wie aus der Originalarbeit hervorgeht, bei verschiedenen Beobachtungsreihen gut übereinstimmende Resultate, auch blieb die jeder Temperatur entsprechende Spannkraft bei weiterem Erwärmen fast vollständig auf dem constanten Werth, dem sie sich von vornherein asymptotisch genähert hatte und änderte sich nicht, als beim Zulassen von Luft zum Apparat das Quecksilberniveau in den Röhren stieg und das Dampfvolumen sehr verminderte (16. Dec. 74).

2) 2. Auflage, 2. Bd., 2. Abth., S. 630.

Erscheinungen bedingen. Endlich muſs, da Edlund für die Fernwirkung des bewegten Aethers das Weber'sche Gesetz als gültig annimmt, die Kritik des letzteren Gesetzes auch die Theorie von Edlund betreffen.“ Auf diese Aeuſserung des Hrn. Verf. wünsche ich folgende Antwort in aller Kürze zu geben.

In meiner Abhandlung: *Théorie des phénomènes électriques*[1]), habe ich auf theoretischem Wege zu beweisen gesucht, daſs die Abstoſsung zweier Aethermolecüle, wenn sie in Bewegung sind, nicht nur von ihrem Abstande, sondern auch von ihrer relativen Geschwindigkeit und der Beschleunigung dieser Geschwindigkeit abhängig seyn muſs. Die Theorie zeigt aber nur, daſs die Abstoſsung eine Function von der relativen Geschwindigkeit und deren Beschleunigung ist, ohne daſs es gegenwärtig möglich ist, die exacte Form dieser Function theoretisch zu bestimmen. Um der genannten Function einen bestimmten Ausdruck zu geben, habe ich deswegen die Erfahrung zu Rathe ziehen müssen, und ich habe dann die Ampère'sche elektrodynamische Formel gewählt, welche innerhalb der Gränzen der Beobachtungen als richtig betrachtet werden kann. Die in meiner Abhandlung S. 21 aufgestellte Formel (13) für die Abstoſsung zweier in Bewegung begriffenen Aethermolecüle macht deswegen keinen Anspruch darauf, ein allgemeines Naturgesetz auszudrücken. Dieses leuchtet aus der ganzen Darstellung hervor. Wenn zwei Aethermolecüle, m und m_1, mit *constanter* Geschwindigkeit längs ihrer Verbindungslinie gegen einander geführt werden, so ist der Ausdruck ihrer gegenseitigen Abstossung im Abstande r nach der Formel (13) $\frac{mm_1}{r^2}\left[1 - av - \frac{1}{4}kv^2\right]$, wenn a und k Constanten und v die relative Geschwindigkeit bedeuten. Nach der Formel würde also die Abstoſsung in eine Anziehung übergehen, wenn $av + \frac{1}{4}kv^2 > 1$ wird. Die mitgetheilte

1) *K. Svenska Vetenskaps Akademiens Handlingar. Stockholm, Norstedt et Söner.* Leipzig bei F. A. Brockhaus.

theoretische Betrachtung zeigt aber, dafs eine solche Umwandlung der abstofsenden Kraft ganz ungereimt ist. Die genannte Formel kann also nur innerhalb gewisser Gränzen eine berechtigte Anwendung finden, wie auch aus der mathematischen Deduction des Hrn. Helmholtz hervorgeht. Es ist aber höchst wahrscheinlich, dafs diese Gränzen so weit von einander getrennt sind, dafs alle unsere experimentellen Daten dazwischen Platz finden.

Um die grofse Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtschwingungen zu erklären, mufs angenommen werden, dafs der Lichtäther eine noch bedeutende Dichtigkeit, aber dessen ungeachtet eine grofse Elasticität besitzt. Da nun die Elasticität mit der Abstossung der Aethermolecüle wahrscheinlich in nächster Verbindung steht, scheint wohl die Annahme nicht unberechtigt zu seyn, dafs eine kleine Veränderung in der Dichtigkeit des Aethers, eine bedeutende Veränderung in der Abstofsung bewirken kann. Die grofsen mechanischen Wirkungen, welche die elektrischen Erscheinungen bisweilen begleiten, finden ihre Erklärung darin, dafs die Geschwindigkeit des Aethers so grofs werden kann. Wie ich in meiner Abhandlung angedeutet[1]), kann die Geschwindigkeit des Aethers in einem galvanischen Strome von etwas gröfserer Stärke und in einer Strombahn von nicht zu grofsem Querschnitte zu mehren Millionen von Metern in der Secunde geschätzt werden. Wenn man nun annimmt, dafs die ganze in einem Blitzschlag entladene Aethermasse $\frac{1}{1000}$ eines Milligramms ausmacht uad dafs die Geschwindigkeit zehn Millionen von Metern beträgt, so erhält man eine entwickelte lebendige Kraft von 50000 Kilogrammeter.

Den obigen Bemerkungen füge ich folgende Betrachtung hinzu:

Aus den optischen Erscheinungen wird gefolgert, dafs der Aether elastisch und mithin auch zusammendrückbar sey. Die bekannten Versuche von Fizeau zeigen überdies, dafs ein Theil des Aethers, wenigstens in gewissen

1) Ibid. S. 61.

Körpern, frei ist und sich von einer Stelle zu der anderen bewegen kann. Wenn die Molecüle des Aethers in Schwingungen gerathen, entstehen Wärme und Licht, wie in der Luft die Schwingungen der Luftmolecüle Schall verursachen. Wird die Luft verdichtet oder verdünnt, oder in eine translatorische Bewegung versetzt, so zeigen sich andere Erscheinungen, die hinlänglich bekannt sind. Nun ist man wohl zu der Frage berechtigt, welche Erscheinungen entstehen müssen, wenn man dem Aether eine gröfsere oder geringere Dichtigkeit giebt, als derselbe im natürlichen Zustande besitzt, oder was man zu erwarten habe, wenn der Aether in eine translatorische Bewegung versetzt wird. Beide diese Veränderungen in der Aethermasse müssen in Folge der optischen Erscheinungen als mögliche vorausgesetzt werden. Wir nehmen nun an, dafs die Aethermolecüle sich im umgekehrten Verhältnisse der Abstände abstofsen. Ob diese Abstofsung eine wahre Fernwirkung sey oder ob sie in einer Fortpflanzung der Wirkung von Molecül zu Molecül bestehe, mufs vorläufig dahingestellt bleiben. Das Resultat wird jedenfalls das nämliche. Wenn man nun die Bewegung zweier aufeinander einwirkender Körper, in welchen der Aether eine gröfsere oder geringere Dichtigkeit wie in dem natürlichen Zustande besitzt, berechnen will, so mufs man natürlich in Betracht ziehen, dafs diese Körper sich nicht im leeren Raume, sondern im Aether bewegen. Der Archimedische Lehrsatz mufs also hier Anwendung finden. Auf diese Weise erhält man wirklich eine genügende Erklärung der elektrostatischen Erscheinungen. Wenn man den Aether in translatorische Bewegung versetzt und dabei erforschen will, welche Erscheinungen dadurch entstehen, mufs man beachten, dafs die gegenseitige Abstofsung zweier Aethermolecüle durch ihre Bewegung verändert worden ist. Dadurch gelangt man ohne bedeutende Schwierigkeiten zur Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen.

Es scheint mir, dafs man, um die elektrischen Erscheinungen zu erklären, erst versuchen müsse, ob diese mit

Benutzung solcher Zustandsveränderungen im Aether, die, so viel man weiſs, darin wirklich stattfinden müssen, möglich sey. Wird es sich zeigen, daſs ein solcher Versuch miſslingt, dann mag man zu Schwingungen, die so beschaffen sind, daſs sie nirgends anderswo vorkommen, seine Zuflucht nehmen.

Stockholm, den 6. December 1874.

XIII. *Bemerkung zu einem von F. Zöllner ausgeführten elektrodynamischen Versuch; von F. Lippich.*

In diesen Annalen Bd. CLIII, S. 138 beschreibt Hr. Zöllner ein Experiment, das er zu Ungunsten der Helmholtz'schen Hypothese eines elementaren elektrodynamischen Potentials zu deuten sucht. Ich selbst hatte vor längerer Zeit die Absicht, dieses Experiment nebst einigen anderen ähnlichen anzustellen, kam aber hiervon wieder ab, da ich mich bald überzeugte, daſs es unfähig sey über die Zulässigkeit des Ampère'schen oder Helmholtz'schen Elementargesetzes zu entscheiden. Es sey mir gestattet meine damaligen Ueberlegungen hier mitzutheilen.

Wir wollen uns das Experiment in möglichst einfacher Form realisirt denken. Ein fester horizontaler Kreisstrom wirke auf einen Stromleiter, der drehbar ist um die verticale, durch den Kreismittelpunkt gehende Axe Z. Dieser bewegliche Leiter bestehe aus einem beliebig geformten linearen Theil OA, dessen Punkt Q in Z liegt, und einem linearen verticalen Theil AB, der bei B in die Quecksilberrinne taucht, welche die Stromzuleitung bewirkt; durch die zur Rinne und zur Axe führenden Zuleitungsdrähte wird dieser zweite Strom ebenfalls geschlossen. Nehmen wir zuerst an, es sey AB mit OA bei A starr verbunden. Die

nach Ampère's Formel berechneten an OAB wirkenden Kräfte ergeben bezüglich Z ein von Null verschiedenes resultirendes Moment M, bei Annahme eines elementaren Potentiales verschwindet das resultirende Moment bezüglich Z. Wendet man aber die Potentialformel auf den ganzen geschlossenen Strom $OAB..O$ an und nimmt gehörige Rücksicht auf die Veränderungen der an B haftenden Stromelemente bei Verschiebung von B, so erhält man, wie Hr. Helmholtz gezeigt hat, als resultirendes Moment aller an dem *thatsächlich veränderlichen Theil* des Stromes $OAB..O$ wirkenden Kräfte wieder M; nur rührt jetzt dieses Moment von einer Kraft her, die im Punkte B angreift.

Hr. Zöllner hat nun in der einen Form seines Versuches den Theil AB nicht starr mit OA verbunden, sondern aus einem Drahtstück hergestellt, das er bei A mittelst einer Oese einhängt und schliefst dann weiter so: Wenn die Drehung des Systems OAB wirklich durch eine Kraft hervorgebracht wird, die in B angreift, so mufs dieser Punkt während der Drehung im Sinne derselben vorgeschoben erscheinen, im Gegentheil aber zurückbleiben wegen des Widerstandes, den der Theil B im Quecksilber findet, wenn die Drehung bewirkt wird durch die Ampère'schen Kräfte. Das Experiment hat Uebereinstimmung mit der letzteren Folgerung ergeben[1]).

So verlockend auch diese Argumentation erscheinen mag, so zeigt doch eine genauere Ueberlegung, dafs sie unberechtigt ist. In der That hat ja Helmholtz nachgewiesen, dafs die nach seinem Gesetze berechnete Arbeit der an einem geschlossenen beliebig veränderlichen Strome wirkenden Kräfte für irgend welche virtuelle Verschiebung identisch ist mit der Arbeit der Ampère'schen Kräfte, die sich aus der verallgemeinerten F. Neumann'schen Formel herleiten läfst. Da sonach in diesem Falle beide Hypo-

1) Damit diese Folgerung richtig sey, mufs der Widerstand im Quecksilber hinreichend grofs seyn gegenüber den an AB wirkenden Kräften.

thesen *aequivalente* Kräftesysteme liefern, so mufs dieses auch stattfinden in der specielleren Anordnung des besprochenen Experimentes.

Dieser Nachweis gelingt sehr leicht. Die allgemeinste virtuelle Verschiebung des Systemes *OAB* läfst sich aus zwei specielleren Verschiebungen zusammensetzen und zwar: 1) aus einer Drehung des starr gedachten Systemes *OAB* um *Z*, 2) aus einer Verschiebung, bei welcher der Punkt *B* fix bleibt, also *OA* eine Drehung um *Z*, *AB* aber eine Drehung um eine horizontale durch *B* und *Z* gehende Axe *X* ausführt. Für beide Arten von Verschiebungen erhält man gleiche Arbeitsgröfsen der nach den beiden Hypothesen wirkenden Kräfte. Dafs dieses für die Drehung um *Z* zutrifft, wurde schon früher hervorgehoben. Bezüglich der zweiten Verschiebung übersieht man zunächst, dafs das Potentialgesetz für die an *OAB* wirkenden Kräfte nicht mehr die Arbeit Null liefert; sie ist zwar Null für die an *OA* angreifenden Kräfte, für die an *AB* thätigen aber, weil bei der Drehung um *X* der Theil *AB* seine relative Lage gegen den fixen Kreisstrom ändert, von Null verschieden. Eine einfache Ueberlegung zeigt dann weiter die Gleichheit dieser Arbeit mit der der Ampère'schen an *OA* und *AB* wirkenden Kräfte. Somit ist die Aequivalenz der beiden in Frage stehenden Kräftesysteme dargethan.

Man bemerkt zugleich, dafs die nach dem Potentialgesetze an *AB* wirkenden Kräfte sich reduciren lassen auf ein Kräftepaar, welches diesen Theil um *X* zu drehen sucht (während seine Ebene parallel zu *Z* ist) und dieses Kräftepaar ist es, welches Hr. Zöllner bei der Interpretation seines Versuches übersehen hat.

Ist *AB* durch einen biegsamen Faden oder durch eine Kette gebildet, so gilt für jedes Element was soeben für den ganzen Theil *AB* bemerkt wurde.

Prag, im December 1874.

XIV. *Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. Dr. G. Baumgartner über den Einfluſs der Temperatur auf die Ausfluſsgeschwindigkeit von Wasser aus Röhren;* *von Oskar Emil Meyer.*

Hr. Baumgartner[1]) hat Versuche über den Ausfluſs von Wasser durch Capillarröhren in der Absicht angestellt, die Frage zu beantworten, ob für die Strömung durch weitere Capillarröhren ein ähnliches Gesetz gelte, wie es Poiseuille für sehr enge und lange gefunden hat. Hr. Baumgartner hat sich damit eine Aufgabe gestellt, welche bereits durch frühere Untersuchungen vollständiger gelöst ist, als es ihm gelingt.

Durch Hrn. G. Hagen's ältere Beobachtungen[2]) ist der Einfluſs der Temperatur auf die Strömung durch Capillaren auf das sorgfältigste untersucht und in einer späteren Abhandlung[3]) desselben Verfassers nachgewiesen worden, daſs der Ausfluſs durch weitere Röhren denselben Gesetzen gehorcht. Ferner habe ich in einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung[4]) Beobachtungen mitgetheilt, aus denen es mir gelang, das Gesetz der Ausfluſsgeschwindigkeit ganz allgemein für weite und enge, für lange und kurze Röhren herzuleiten, und zwar in einer solchen Form, daſs für den besonderen Fall langer und enger Röhren das Poiseuille'sche Gesetz, dagegen für den anderen Grenzfall einer unendlich kurzen Röhre das Toricelli'sche Theorem hervortritt.

Dieses allgemeinere Gesetz ist in der Formel

$$t = V \left\{ \frac{1}{\pi \varkappa R^2 \sqrt{2gh}} + \frac{8\eta\lambda}{\pi R^4 \varrho g h} \right\}$$

1) Diese Ann. Bd. 153, S. 44.
2) Abhandl. der Berl. Akad. 1854.
3) Abhandl. der Berl. Akad. 1869.
4) Pogg. Ann. Jubelband 1874.

enthalten, welche die Ausflufszeit t eines Flüssigkeits-Volumens V durch eine cylindrische Röhre von der Länge λ und vom Halbmesser R bestimmt; h ist die Druckhöhe, g die beschleunigende Kraft der Schwere, ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, η ihr Reibungscoëfficient, endlich $\varkappa$ der wegen der Contraction des Strahles erforderliche Correctionsfactor. Ein drittes von λ^2 abhängendes Glied, welches ich meiner Formel zur Anwendung auf die von mir benutzten, sehr langen Röhren hinzufügen mufste, kann hier unberücksichtigt bleiben und darf vernachlässigt werden, weil Hr. Baumgartner verhältnifsmäfsig kurze Röhren benutzte.

Hrn. Baumgartner's Beobachtungen können nichts anderes ergeben, als dafs sie dieses Gesetz bestätigen. Ich will das durch Zusammenstellung einiger nach der obigen Formel berechneten Zahlen mit dem von ihm beobachteten zeigen.

Bei dieser Berechnung habe ich die Druckhöhe h im Mittel zu 397^{mm} angenommen; die Schwere habe ich $g = 9^{\text{m}},81$ und den Contractionscoefficienten $\varkappa = 0,6$ gesetzt; den Reibungscoefficienten des Wassers habe ich $\eta = 0,0122$ in Quadratcentimetern angenommen, entsprechend den von Hrn. Hagen für kaltes Brunnenwasser von etwa 4° C. gewonnenen Bestimmungen. [1]) Indem ich dann die übrigen Zahlen nach Hrn. Baumgartner's Angabe einsetzte, erhielt ich folgende Werthe für die ausgeflossene Wassermenge in Grammen, denen ich die beobachteten mit Angabe der Temperatur gegenüberstelle.

Röhre.	Berechnet.	Beobachtet.	Temperatur.
I.	12,0	11,4	7°,0 C.
II.	410,2	390,0	6 ,0 „
III.	112,4	113,7	2 ,8 „
IV.	95,7	92,0	2 ,3 „
V *a*.	114,6	114,0	4 ,0 „
V *b*.	180,5	185,0	3 ,0 „
V *c*.	247,0	251,0	3 ,5 „
VI.	366,0	376,0	2 ,0 „

1) Vergl. Bd 113 dieser Annalen, S. 423.

Die Uebereinstimmung wird gewiſs befriedigen, wenn man erwägt, daſs Hr. Baumgartner sich einer gewöhnlichen Krämerwaage bediente. Eine Berechnung sämmtlicher Beobachtungen für andere Temperaturgrade erscheint unnöthig, da die obigen Beispiele als Bestätigung der aufgestellten Formel genügen.

Die von Hrn. Baumgartner beobachtete, übrigens schon 1854 von Hrn. Hagen viel genauer untersuchte Erscheinung, daſs die Ausfluſsmenge für eine bestimmte Temperatur ein Maximum erreicht, erklärt sich nach der Formel ohne Schwierigkeit, weil η und ϱ beide mit der Temperatur, jedoch in ungleichem Verhältnisse abnehmen.

Breslau, 26. November 1874.

XV. *Bemerkung zu dem Aufsatze des Hrn. Dr. F. Exner über die Lösungsfiguren an Krystallflächen; von Heinrich Baumhauer.*

Hr. Exner erwähnt in dem genannten Aufsatze (Nr. 9 dieses Jahrganges der Annalen) einer meiner früheren Arbeiten über Aetzfiguren an Krystallen, indem er sagt, ich sey durch die Untersuchung der Aetzfiguren des Zuckers und des doppeltchromsauren Kalis auf die Vermuthung geführt worden, die Aetzfiguren ständen auch in einem Zusammenhange mit der Spaltbarkeit der Substanz. Ich habe allerdings am Schlusse der betreffenden Mittheilung (diese Annalen Bd. 140, S. 271), worin ich die Aetzfiguren des Kalkspaths, des gelben Blutlaugen- und Seignettesalzes, des Zuckers und des doppeltchromsauren Kalis beschrieb, bemerkt: „Obschon die Aetzfiguren an Krystallen mit den Flächen und Spaltungsrichtungen derselben in engem Zusammenhange stehen, so lassen dieselben sich doch nicht durch solche allein erklären, wie dies z. B.

der geätzte rhomboëdrische Kalkspath zeigt.“ Im folgenden Aufsatze über denselben Gegenstand (November 1871, diese Annalen Bd. 145, S. 459) gelangte ich indeſs schon zu der bestimmten Ansicht, „daſs die Aetzfiguren ganz unabhängig von den Spaltungsrichtungen der betreffenden Krystalle, ja manchmal im Widerspruch mit denselben auftreten.“ Diese Ansicht habe ich schlieſslich noch in einem, der königl. Akademie d. Wissensch. zu München in der Sitzung vom 3. Januar d. J. vorgelegten Aufsatze über „die Aetzfiguren an Krystallen“, durch Anführung weiterer Thatsachen bekräftigt.

XVI. *Notiz über die Strahlen des Lichtes, welche das Xantophyll der Pflanze zerlegen; von Julius Wiesner.*

Als Ergänzung zu meiner kleinen Mittheilung in diesen Annalen[1]) über jene Lichtstrahlen, welche bei Sauerstoffzutritt das Chlorophyll zerlegen, bringe ich hier eine Notiz über das Verhalten des Xanthophylls im Lichte verschiedener Brechbarkeit. Vorerst sey es mir gestattet anzuführen, daſs die in der genannten Mittheilung angekündigte Experimentaluntersuchung über die Beziehung des Lichtes zum Chlorophyll[2]) bereits erschienen ist, in welcher auch der hier kurz darzulegende Gegenstand eingehend abgehandelt ist.

Während die bekannten chemischen Vorgänge im Chlorophyllkorn: Entstehung und Zerstörung des Chlorophylls, ferner Assimilation der Kohlensäure und des Wassers,

1) Bd. CLII. Stück 3 (1874 No. 7) S. 496ff.

2) Arbeiten des pflanzenphysiol. Institutes der Wiener Universität I. Untersuchungen über die Beziehungen des Lichtes zum Chlorophyll. Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften Bd. 69, I. Abth.

am raschesten durch die am meisten *leuchtenden* Strahlen des Lichtes vollzogen werden, findet sich im Chlorophyllkorn eine Substanz vor, welche bei Zutritt von Sauerstoff am energischsten durch die sog. *chemischen* (blauen, violetten und ultravioletten) Strahlen zerlegt wird.

Schüttelt man ein alkoholisches Chlorophyllextract mit Benzol oder mit Schwefelkohlenstoff[1]), ätherischen oder fetten Oelen, so diffundirt der grüne Chlorophyllfarbstoff in diese Flüssigkeit, während im Weingeist eine gelbe Substanz gelöst zurückbleibt, welche, wie Kraus zeigte, nicht nur im Chlorophyllkorn, sondern auch in vielen gelb gefärbten Pflanzentheilen vorkommt, das Xanthophyll.

Kocht man die weingeistige Xanthophylllösung aus und stellt man sie über Quecksilber im Sonnenlichte auf, so verändert sie sich nicht. Bei ungehemmtem Luftzutritt wird sie hingegen im Lichte entfärbt.

Eine weingeistige Xanthophylllösung entfärbte sich bei einer Temperatur von 21 bis 23° C. im Sonnenlichte.

hinter	schwach getrübtem Wasser nach	0,95	Stunden
„	schwefelsaurem Kupferoxydammoniak nach	1,20	„
„	ätherischer Chlorophylllösung nach	5,71	„
„	doppeltchromsaurem Kali nach .	9,35	„
„	Aescorcëin	9,68	„

Zum Versuche wurden genau dieselben Apparate und lichtdurchlassenden Flüssigkeiten verwendet, welche zur Lösung der Frage über die das Chlorophyll zerstörenden Antheile des Spektrums dienten, über welche ich in der im Eingange genannten Mittheilung die nöthigen Angaben gemacht habe[2]).

Wien, im November 1874.

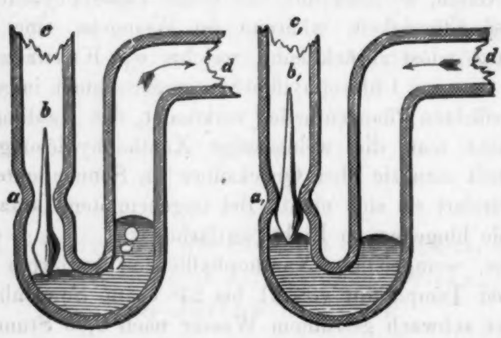
1) S. Kraus, Chlorophyllfarbstoffe. Stuttgart 1872 und Treub, Flora 1874.

2) S. 499 ff. Dort soll es S. 502, 15. Zeile von unten statt „sie" heifsen: „Die Chlorophyllzersetzung".

XVII. *Selbstthätiges Quecksilber-Ventil; von A. Gawalovski, Cand. chem. in Prag.*

Um Gas oder Flüssigkeiten, deren Eigenschaft, Quecksilber nicht anzugreifen, Bedingnifs ist, bequem nach einer

Fig. 1. Fig. 2.



Richtung zu leiten, und zugleich den Rücktritt derselben sicher zu finden, empfiehlt sich das in obenstehenden Figuren versinnlichte einfache Geräth.

Selbes besteht aus einem engen Schenkelrohr, das 1 Cm. über der Biegung, bei *a* verengt ist.

In dieser Verengung spielt der kleine Glastropfen b_1 derart, dafs er bei dem Stande (Fig. 2) $a_1 b_1$ die Verengung schliefst. Im Buge der Schenkel ist etwas Quecksilber vorgelegt. Tritt nun in der (in Fig. 1) versinnlichten Weise von *c* nach *d* Luft, Gas, oder irgend eine indifferente Flüssigkeit ein (und zwar stets eine kleine Compression vorausgesetzt), so kann, nachdem das Quecksilber den (in Fig. 1) angedeuteten Stand angenommen, selbes Medium ungehindert nach *d*, und von hier an seinen Bestimmungsort gelangen. Ist jedoch die Möglichkeit eines Zurücktretens da, nimmt das Quecksilber den Stand, Fig. 2, an und schliefst b_1 die Oeffnung a_1 einestheils, das Quecksilber selbst aber das Rohr, andererntheils total ab.

Da Glas (nach Dumas spec. Gew. Böhm. Glas 2,396 Spiegelglas 2,488 bis 2,506; nach Schubarth, grünes Glas 2,642, engl. Spiegelglas 2,450) 5½ mal leichter als Quecksilber (13,557) ist, so wird es immer oben schwimmen, und das kleine Ventil *b* nie versagen.

Dieses Ventil eignet sich sehr gut zum Leuchtgasabschlufs des Tages über, so wie als Ersatz eines Hahnes bei einem Gasometer, da es den Gasometer total sperrt, und nur dann erst, wenn die Masse direkt aus dem Obergefäfs wirkt, das betreffende Gas austreten, bei nachlassendem Druck jedoch keine Atmosphäre eintreten läfst.

Ueber die Erzeugung dieses kleinen Hülfsgeräthes sey nur so viel gesagt, dafs man ein im Fleische ziemlich starkes gerades Glasrohr zuerst bei *a* staucht, sodann durch gelindes Ausziehen in heller Gluth verengt; aus einem Stückchen Glasstab zieht man sich den gewünschten Glastropfen *b*, und läfst selben nun mit der Spitze voran in das verengte Rohr fallen, und bläst nun erst selbes zu einem Schenkel.

XVIII. *Bunsen'sche Kohlen-Zink-Batterie mit Selbstentleerung; von A. Gawalowski.*

Ein allgemeiner Uebelstand bei den constanten galvanischen Batterien ist die allmälige Veränderung der Füllung, theils in Folge atmosphärischer Einwirkung, theils durch Lösung des einen oder anderen Bestandtheiles der Kette.

Die Bunsen'schen, Keiser'schen, Schmidt'schen usw. Flaschenelemente verfolgen mehr oder weniger den Zweck, diesen Uebelstand zu eliminiren; trotz alle dem ist eine allmälige Wirkungsverminderung nicht ganz gehoben.

Ich wende daher folgende Anordnung einer Batterie an, die wiewohl nur bei derartigen Elementen Geltung findet, zu deren Füllung nicht oxydirbare Flüssigkeiten, als NO_5, SO_3, CuO, SO_3 u. s. w., verwendet werden, — in diesen Fällen aber den Zweck, die Füllungen möglichst ang kräftig und die Metallcylinder möglichst ungelöst zu erhalten, vollends erfüllen. In beistehender Figur 1 ist

Fig. 1.

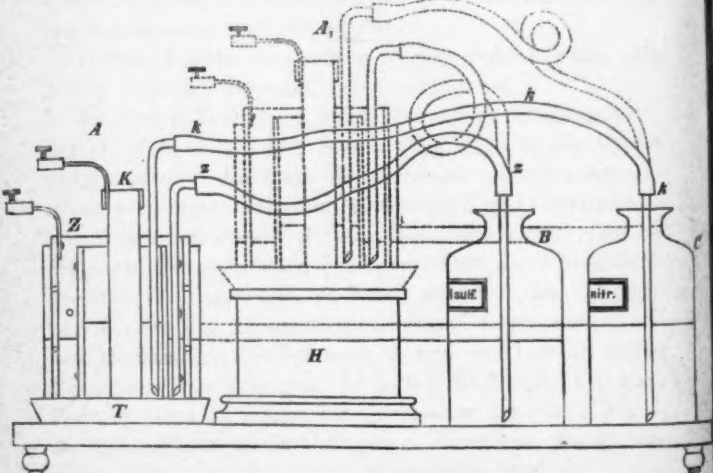
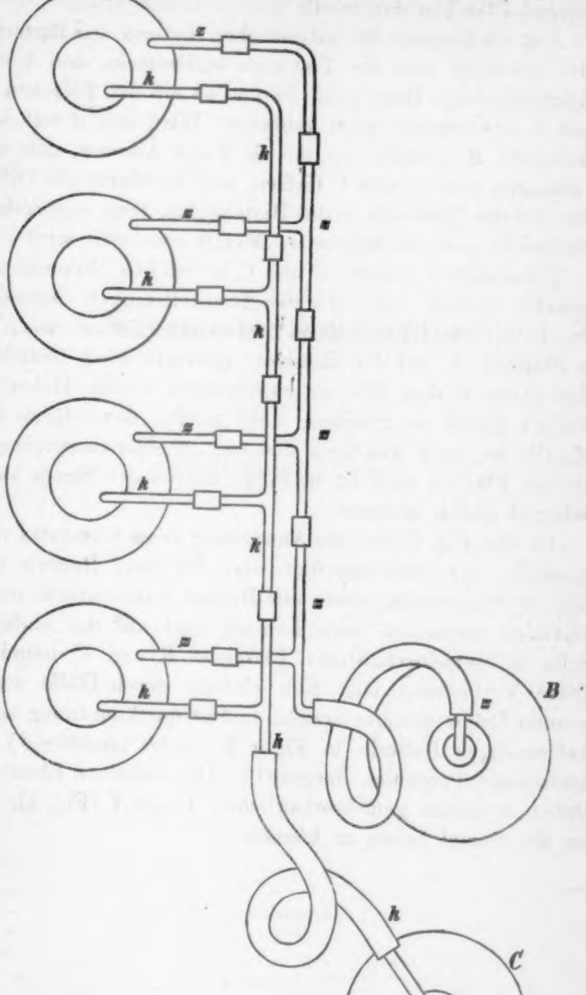


Fig. 2.



die Anordnung je eines Elementes und zweier hinzugehörigen Flaschen dargestellt.

A ist ein Element der galvanischen Batterie; das Batterieglas einerseits und die Thonzelle andererseits sind durch gleichschenklige Heberrohre *kk* und *zz* mit den Flaschen *B* und *C* in Communication gebracht. Wird nun *A* auf den Holzklotz *H* gestellt, so ist die Folge hiervon, daſs die Füllungen nach *B* und *C* flieſsen, und hierdurch die Diffusion aus der Thonzelle in das Batterieglas, resp. umgekehrt, verhindert und das angesetzte Metall conservirt wird.

Selbstredend müssen *B* und *C* in solchen Dimensionen gewählt werden, daſs selbe den Thonzelleninhalt einerseits, den Inhalt des Batterieglases andererseits fassen, wenn *A* in Stellung A_1 auf den Holzklotz gebracht wird, trotzdem aber etwas in dem Element zurückbleibt, um die Heber *kk* und *zz* gefüllt zu erhalten; wohl greifen diese Reste die Metalle an, doch geschieht dies nur auf einer entsprechend kleinen Fläche, und ist in Folge dessen der Strom auch jederzeit gleich wirksam.

Da die Fig. 1 nun die Anordnung eines Elementes versinnlicht, sey noch angefügt, daſs bei einer Batterie alle Röhren *k* einerseits, sowie alle Röhren *z* andererseits unter einander verbunden seyn können, und auf der anderen Seite in gemeinschaftliche Flaschen *B* und *C* münden. Diese Verbindung läſst sich einfach durch Hülfe sogenannter Dreiwegerohre erzielen und ist die Anordnung einer 4 elementigen Batterie in Figur 2 (siehe umstehend) als horizontale Projection dargestellt. Die einzelnen Elemente stehen in einem gemeinschaftlichen Troge *T* (Fig. 1), um sie auf einmal heben zu können.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47.

Namenregister

zum

Jahrgang 1874.

(Die Bände 151, 152, 153 sind bezeichnet durch I, II, III.)

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47.

Fig. 4.

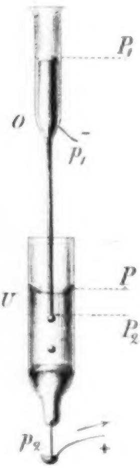
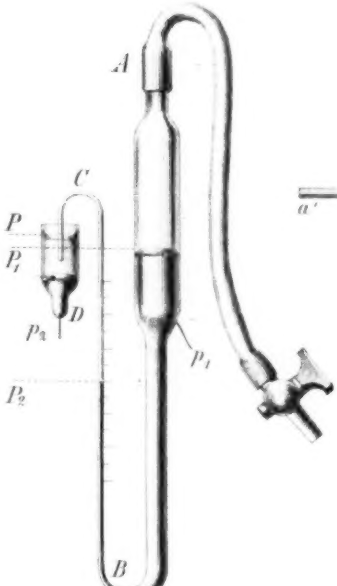


Fig. 5.

Fig. 6.



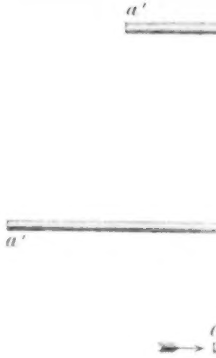
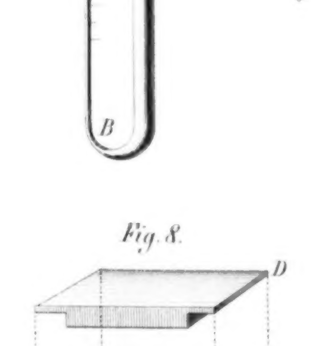
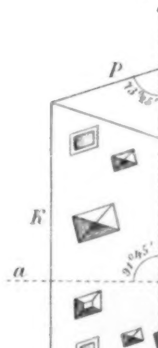


Fig. 7.

Fig. 8.



Fig



Taf. I.

Fig. 1.

Fig. 2.

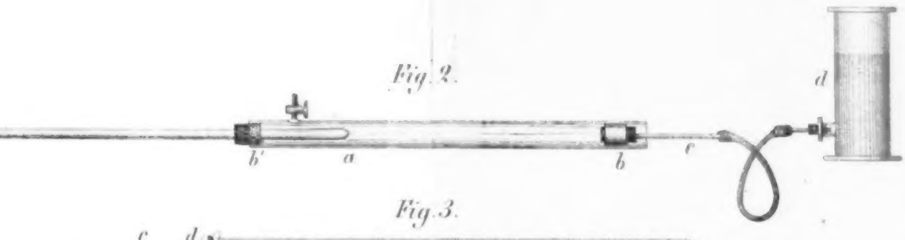


Fig. 3.

Fig. 9.

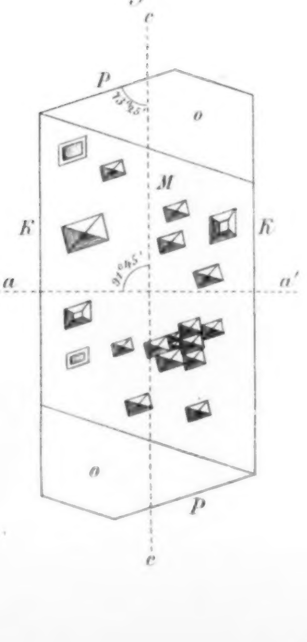


Fig. 10.

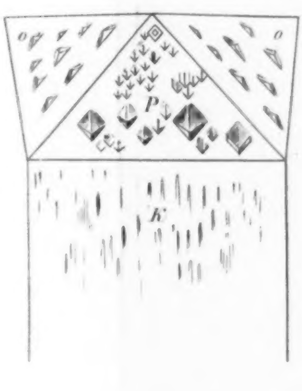


Fig. 11.

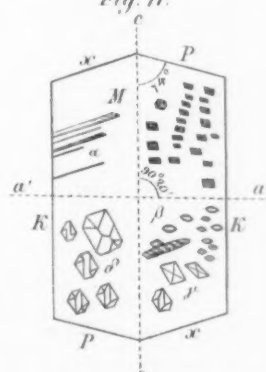
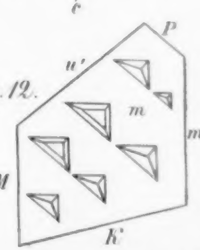
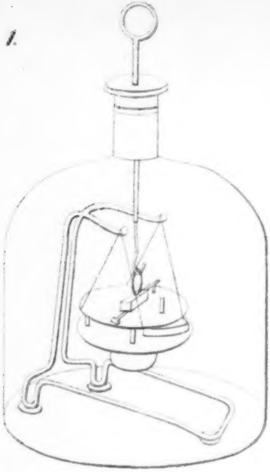


Fig. 12.

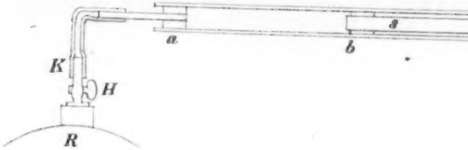


Lith. von Laue.

1.

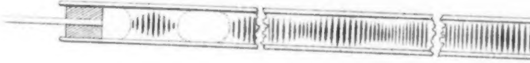


2.

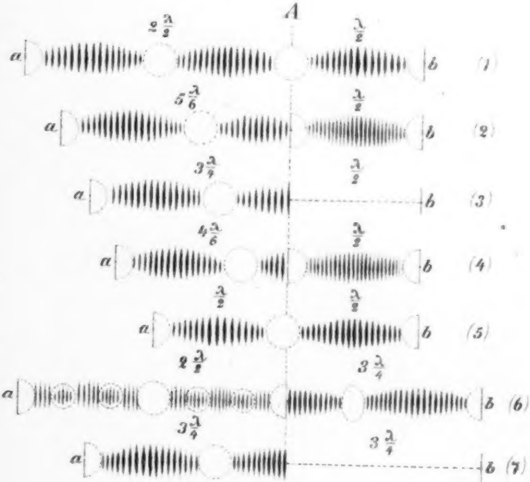


3.

5.



4.



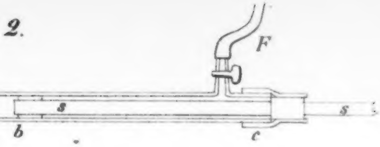
7.

8.

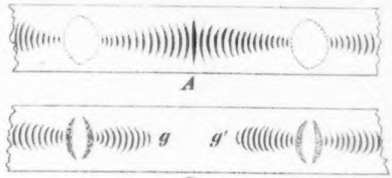
9.

Alb. Schütze Lith. Inst. Berlin

2.

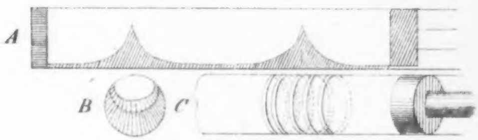


6.

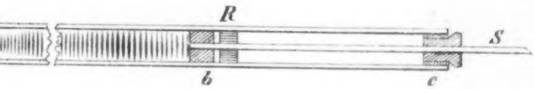


3.

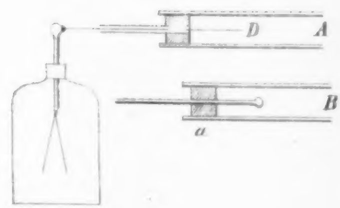
10.



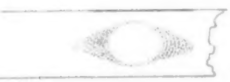
5.



11.

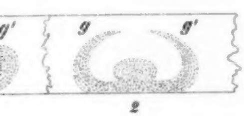


7.

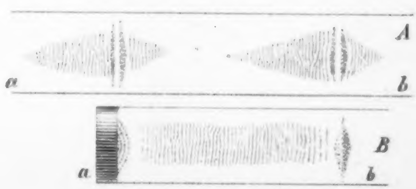


13.

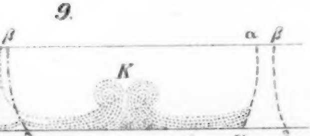
8.



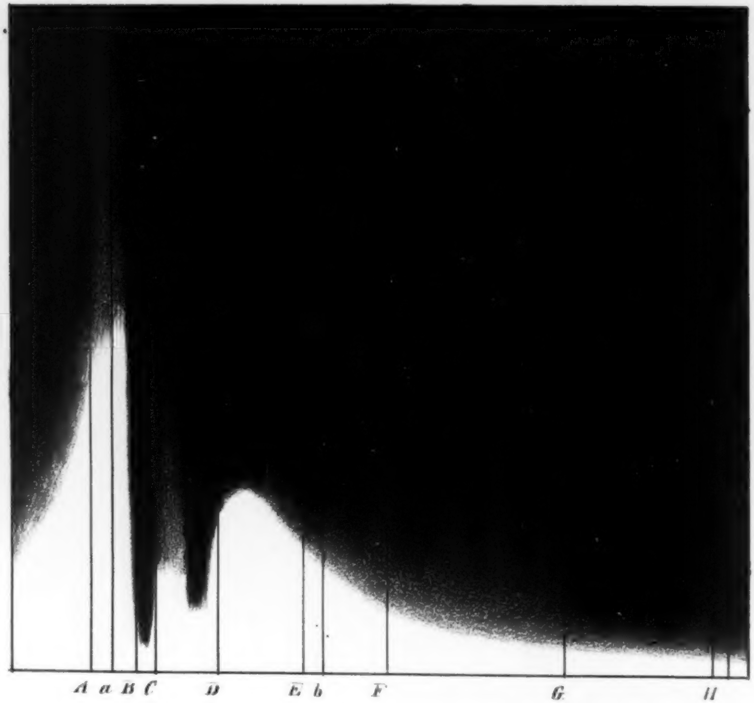
12.



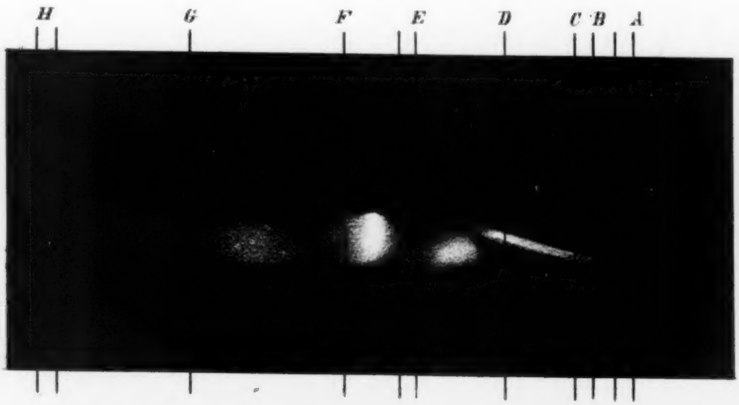
9.



2.

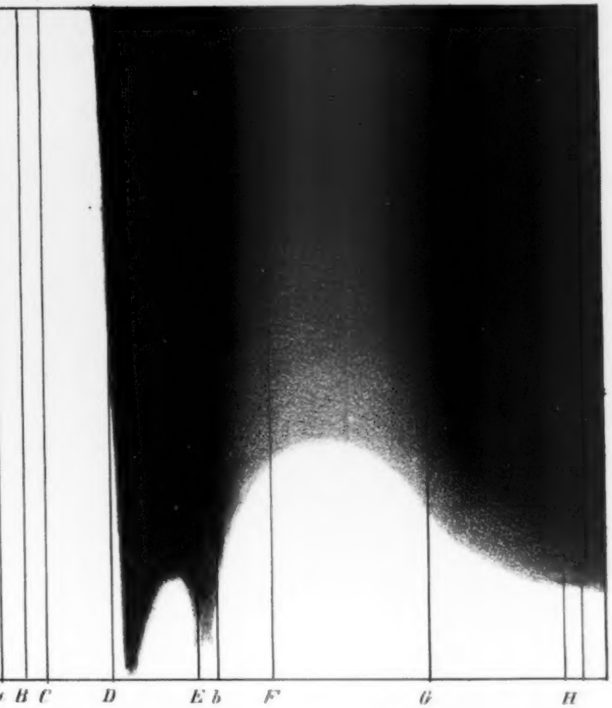


3.

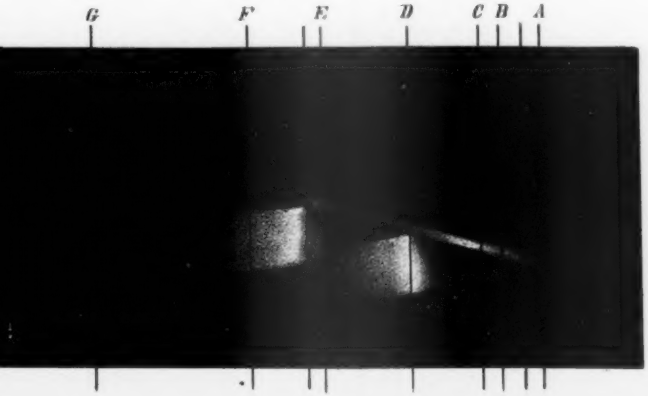


Alb. Schütze Lith. Inst. Berlin.

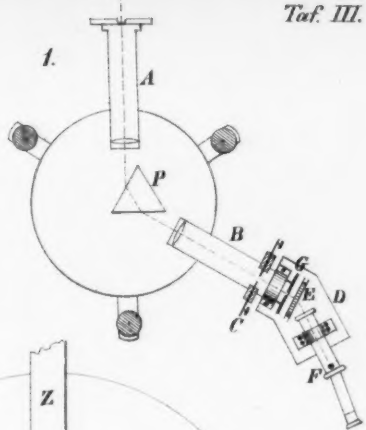
4.


B C
D
E b
F
G
H

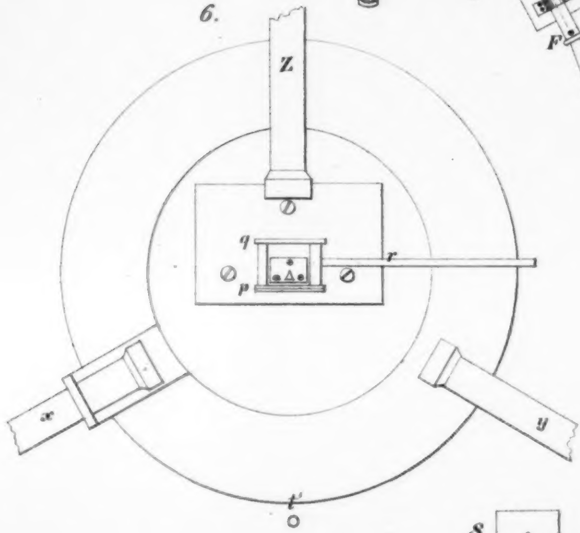
5.


G
F
E
D
C B A

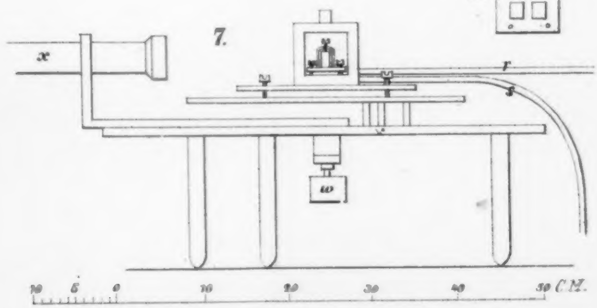
1.


A
P
B
G
E
D
C
F

6.


Z
q
r
p
x
y
t

7.


x
r
s
w
10 5 0 10 20 30 40 50 C.M.

8.

Fig. 1.

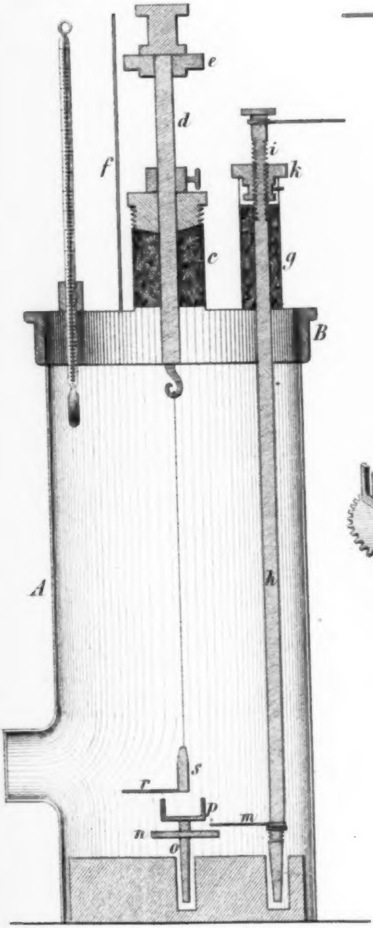


Fig. 2.

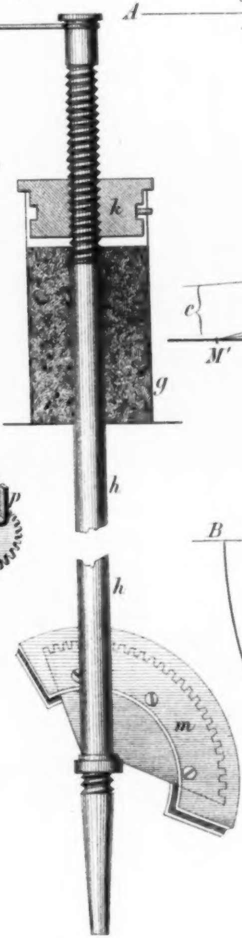
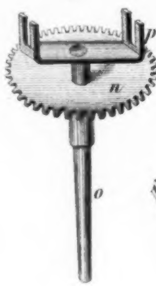


Fig. 3.



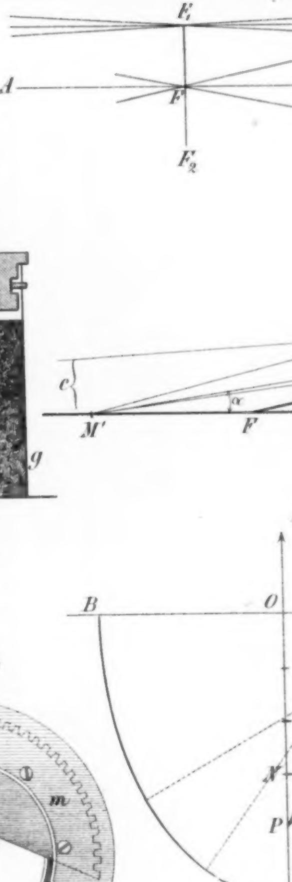


Fig. 8.

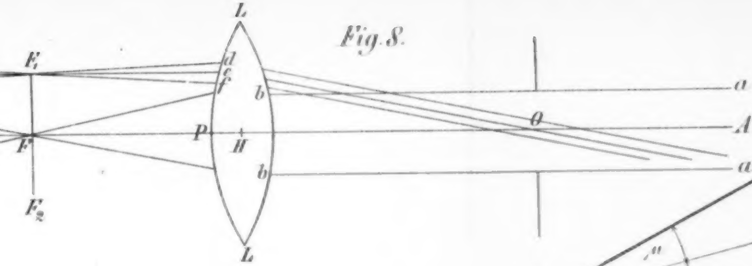


Fig. 4.

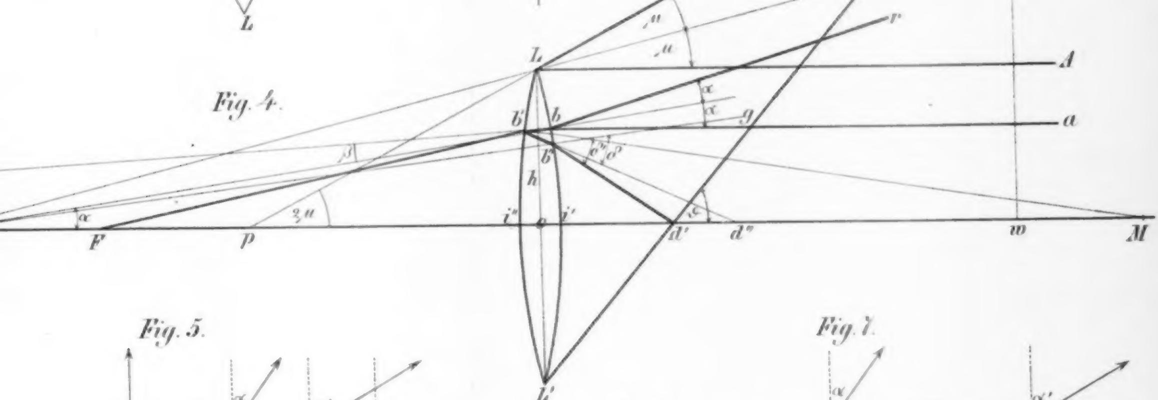


Fig. 5.

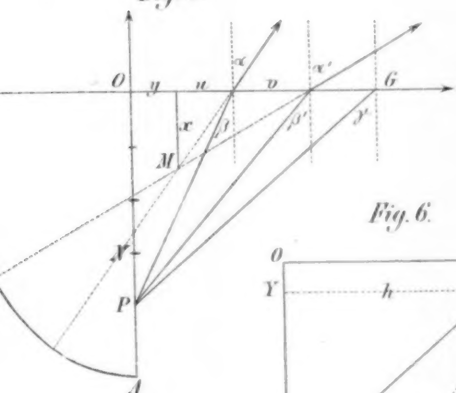


Fig. 6.

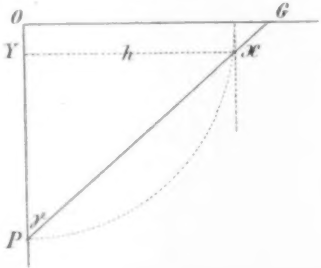


Fig. 7.